4. feladatsor – Absztrakt algebra

4.1. Feladat. Művelet-e

(a) a szokásos összeadás, illetve szorzás a $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ halmazon;
(b) a szokásos összeadás, illetve szorzás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
(c) a szokásos összeadás, illetve szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon;
(d) a metszés, illetve egyesítés az $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ halmazon;
(e) a szokásos összeadás a $\mathbb{Z}_4$ halmazon;
(f) a szokásos összeadás a $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\}$ halmazon, ahol $\overline{0}, \overline{3}, \overline{6} \in \mathbb{Z}_9$?

4.2. Feladat. Készítsük el az alábbi grupoidok művelettábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

(a) $(\{-1, 0, 1\};\ \cdot\ )$;
(b) $(\{-1, 0, 1\};\ \sqcup\ )$, ahol $a \sqcup b = \max(a, b)$;
(c) $(P(\{1, 2\});\ \setminus\ )$;
(d) $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \rightarrow)$, ahol $\mathbf{i}$ az igaz, $\mathbf{h}$ a hamis logikai érték.

4.3. Feladat. Az alábbi művelettáblázatok alapján döntsük el, hogy kommutatív-e, kancellatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

(a)

$\circ$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	b	c	b	b
d	d	d	a	a

(b)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	a
d	d	d	d	d

4.4. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok asszociatívak-e, kommutatívak-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keressük meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze. Ez alapján döntsük el, hogy a grupoid, félcsoportot, monoidot vagy csoportot alkot-e.

(a) $(\mathbb{Q};\ \circ\ )$, ahol $q \circ r = q$;
(b) $(\mathbb{N};\ *\ )$, ahol $m * n = mn - m + n$;
(c) $(\mathbb{R};\ \square\ )$, ahol $x \,\square\, y = 12 - 3x - 3y + xy$;
(d) $(\mathbb{R};\ \triangle\ )$, ahol $x \,\triangle\, y = xy - 2(x + y) + 6$;
(e) $(\mathbb{R};\ \sqcup\ )$, ahol $x \sqcup y = \max(x, y)$;
(f) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1\};\ \oplus\ )$, ahol $x \oplus y = |x - y|$.

4.5. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok. (Jelölje M_2 a 2×2-es valós mátrixok halmazát.)

(a) $(\mathbb{N};\ +\ )$; (b) $(\mathbb{N}_0;\ +\ )$; (c) $(\mathbb{Z};\ +\ )$; (d) $(\mathbb{Q};\ +\ )$;
(e) $(\mathbb{Z}_{12};\ +\ )$; (f) $(\mathbb{Z};\ \cdot\ )$; (g) $(\mathbb{Q};\ \cdot\ )$; (h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\};\ \cdot\ )$;
(i) $(\mathbb{R}^+;\ \cdot\ )$; (j) $(\mathbb{Z}_{12};\ \cdot\ )$; (k) $(P(\mathbb{N});\ \cap\ )$; (l) , $(P(\mathbb{N});\ \triangle\ )$;
(m) $(M_2;\ +\ )$; (n) $(M_2;\ \cdot\ )$.

4.6. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek érvényesek tetszőleges csoport minden a, b, x, y elemére?

(a) Ha $a^{-1} = b^{-1}$, akkor $a = b$.
(b) Ha $xa = ay$, akkor $x = y$.
(c) Ha $abx = 1$, akkor $x = a^{-1}b^{-1}$.
(d) Ha $(ab)^2 = a^2b^2$, akkor $ab = ba$.

4.7. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebrák közül? (Jelölje M_2 a 2×2-es valós mátrixok halmazát.)

(a) $(\mathbb{N};\, +\,;\, \cdot\,)$; (b) $(\mathbb{Z};\, +\,;\, \cdot\,)$; (c) $(\mathbb{Q};\, +\,;\, \cdot\,)$; (d) $(\mathbb{R};\, +\,;\, \cdot\,)$
(e) $(\mathbb{Z}_{12};\, +\,;\, \cdot\,)$; (f) $(\mathbb{Z}_{13};\, +\,;\, \cdot\,)$; (g) $(P(\mathbb{N});\, \triangle\,;\cap)$; (h) $(M_2;\, +\,;\, \cdot\,)$.

4.8. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{17}$ testben.

(a) $\overline{9} + \overline{12}$; (b) $\overline{2} \cdot \overline{11}$; (c) $\frac{\overline{2}}{\overline{9}}$; (d) $\overline{11}^{18}$; (e) $\overline{11}^{15}$.

4.9. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{15}$ gyűrűben.

(a) $\overline{8} + \overline{9}$; (b) $\overline{3} \cdot \overline{8}$; (c) $\frac{\overline{2}}{\overline{7}}$; (d) $\frac{\overline{1}}{\overline{5}}$; (e) $\overline{2}^{10}$.

4.10. Feladat. A $\mathbf{T} = (\{a, b, c, d\}; \circ)$ grupoid művelettáblája:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	a	c	a
d	d	c	a	d

Határozzuk meg a $\mathbf{T}$ grupoid következő részalgebráit, valamint adjuk meg T egy minimális generátorrendszerét.

(a) $[a]$; (b) $[\{b, c\}]$; (c) $[b]$; (d) $[d]$; (e) $[\{b, c, d\}]$.

4.11. Feladat. Határozzuk meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportot.

(a) $G = (\mathbb{Z}_4;\, +\,)$, $A = \{\overline{2}\}$; (b) $G = (\mathbb{Z}_4;\, +\,)$, $A = \{\overline{3}\}$;
(c) $G = (\mathbb{Z}_6;\, +\,)$, $A = \{\overline{2}\}$; (d) $G = (\mathbb{Z}_{12};\, +\,)$, $A = \{\overline{8}, \overline{10}\}$;
(e) $G = (\mathbb{Q};\, +\,)$, $A = \mathbb{N}$; (f) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\};\, \cdot\,)$, $A = \mathbb{Q}^-$.

4.12. Feladat. Határozzuk meg a G csoportban az a elem rendjét.

(a) $G = (\mathbb{Z}_4;\, +\,)$, $a = \overline{2}$; (b) $G = (\mathbb{Z}_4;\, +\,)$, $a = \overline{3}$;
(c) $G = (\mathbb{Z}_6;\, +\,)$, $a = \overline{2}$; (d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\};\, \cdot\,)$, $a = i$.

4.13. Feladat. Legyen G csoport, H részcsoport és $a, b \in G$. Határozzuk meg az a elem H szerinti baloldali mellékosztályát, és döntsük el, hogy eleme-e ennek a mellékosztálynak a b elem.

(a) $G = (\mathbb{Z}_6;\, +\,)$, $H = [\overline{3}]$, $a = \overline{1}$, $b = \overline{2}$;
(b) $G = (\mathbb{Z};\, +\,)$, $H = \{3k\colon k \in \mathbb{Z}\}$, $a = 2$, $b = -4$;
(c) $G = (\mathbb{R}^2;\, +\,)$, $H = \{(x, x)\colon x \in \mathbb{R}\}$, $a = (3, 4)$, $b = (-8, -7)$;
(d) $G = (\mathbb{Z}^2;\, +\,)$, $H = \{(5x, -2x)\colon x \in \mathbb{Z}\}$, $a = (2, -1)$, $b = (17, -5)$.

4.14. Feladat. Az $\mathbf{A} = (\{0,1,2\};\circ)$, $\mathbf{B} = (\{a,b,c\};*)$, $\mathbf{C} = (\{p,q,r\};\square)$ és $\mathbf{D} = (\{-1,0,1\};\cdot)$ grupoidok művelettáblázatai a következők.

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\square$	p	q	r
p	p	p	p
q	p	q	r
r	p	r	q

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Döntsük el, hogy mely grupoidok izomorfak. (Adjuk meg az izomorfizmusokhoz tartozó leképezésket.)

4.15. Feladat. Az előző feladatban megadott $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ grupoidokra igazak-e a következő állítások?

(a) Legyen $\mathcal{C}_1 = \{\{p\}\{q,r\}\}$ osztályozás a $\mathbf{C}$ grupoid alaphalmazán. A $\mathcal{C}_1$ osztályozáshoz tartozó α ekvivalenciareláció kongruencia $\mathbf{C}$-n.

(b) Legyen $\mathcal{C}_2 = \{\{0\}\{1,2\}\}$ osztályozás az $\mathbf{A}$ grupoid alaphalmazán. A $\mathcal{C}_2$ osztályozáshoz tartozó β ekvivalenciareláció kongruencia $\mathbf{A}$-n.

(c) Legyen γ kongruencia $\mathbf{A}$-n. Ha $(0,1) \in \gamma$, akkor szükségképpen $(1,2) \in \gamma$.

(d) Legyen δ kongruencia $\mathbf{B}$-n. Ha $(a,b) \in \delta$, akkor szükségképpen $(a,c) \in \delta$.

4.16. Feladat. A $\mathbf{T} = (\{a,b,c,d\};*)$ grupoid művelettáblája:

$*$	a	b	c	d
a	b	b	d	d
b	a	c	c	a
c	b	d	d	b
d	a	c	a	c

Döntsük el, hogy az alábbi osztályozásokhoz tartozó ekvivalenciarelációk kongruenciák-e $\mathbf{T}$-n.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$;
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a,b,c,d\}\}$;
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a,b,c\},\{d\}\}$;
(d) $\mathcal{C}_4 = \{\{a,c\},\{b,d\}\}$;
(e) $\mathcal{C}_5 = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$.