Gráfelmélet

(2017. február 15.)

Bogya Norbert, Kátai-Urbán Kamilla

A gráfok az informatikában gyakran előforduló matematikai struktúrák. Az internet is felfogható egy gráfként, de akár egy adott épület villamos hálózata is. Az emberek közötti ismertségek is kezelhetők gráfként (Facebook). A GPS is gráfként kezeli a térképeket, és gráfelméleti algoritmusok használatával állítja elő az útvonalat. A kémiai molekulák is vizsgálhatók gráfként, mint az atomok és a köztük lévő kötések megjelenítése.

1. Alapfogalmak

1. Definíció (Gráf). A $G = (V, E, \alpha)$ hármast gráfnak nevezzük, ha V és E két halmaz, $\alpha \colon E \to \{\{u, v\} \colon u, v \in V\}$ egy leképezés. A V halmaz elemeit a gráf csúcsainak (pontjainak), az E halmaz elemeit a gráf éleinek nevezzük. Tetszőleges $e \in E$ élre, ha $e\alpha = \{u, v\}$, akkor u-t és v-t az e él végpontjainak hívjuk. Ha $u = v$, akkor az e élt hurokélnek nevezzük.

2. Megjegyzés. A fenti definíció irányítás nélküli gráfokat ad meg, az α leképezés mondja meg, hogy mely csúcsok és élek állnak kapcsolatban. A továbbiakban a gráfoknál az α leképezést nem jelöljük. Azt, hogy e végpontja vagy kezdőpontja v, úgy is kifejezhetjük, hogy e illeszkedik az v pontra.

3. Definíció. Legyen adott egy $G = (V, E)$ gráf. Az $e, f \in E$ éleket többszörös élnek vagy párhuzamos élnek nevezzük, ha $e\alpha = f\alpha$, azaz ugyanazokra a pontokra illeszkednek.

A különböző alkalmazások során a hurokélek és a többszörös élek elveszthetik jelentőségüket. Például városok közötti útvonaltervezésnél nincsenek hurokélek, vagy a Facebook ismertségi gráfjában sincsenek se hurokélek, se párhuzamos élek. (Ez azt jelenti, hogy nem szoktuk feltüntetni, hogy Anna ismeri saját magát, illetve ha ismeri Ádámot, akkor azt csak egyféleképpen ismeri.) Ez indokolhatja, hogy olyan gráfokat vizsgáljunk, melyekben nincsenek ilyen „különleges élek”.

4. Definíció (Egyszerű gráf). Azokat a gráfokat, melyekben nincs hurokél és nincsenek többszörös élek, egyszerű gráfoknak nevezzük.

A különböző alkalmazásokban többször előkerül az, hogy a gráf élein keresztül szeretnénk tenni egy „sétát”. Nyilván az éleken történő „séta” közben csúcsokon és éleken haladunk át, így különböző sétákat különböztetünk meg attól függően, hogy miken nem akarunk többször is keresztülmenni.

5. Definíció (Séta). Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot sétának nevezünk, ha $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sorozat V-beli pontok egy sorozata, és az $e_i \in E$ élek végpontjai v_{i-1} és v_i minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén. Ha $v_0 = v_k$, akkor zárt sétáról beszélünk. A k számot a séta hosszának nevezzük.

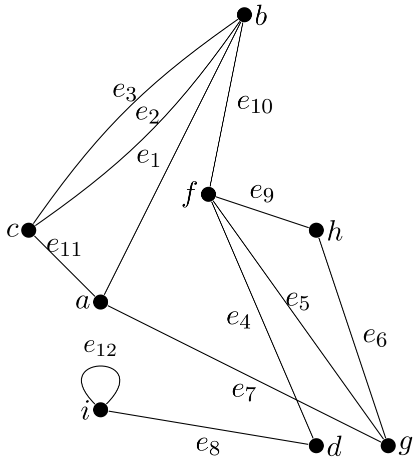
6. Definíció (Vonal). Ha egy séta élsorozatában nincs ismétlődés, akkor a sétát vonalnak, illetve zárt vonalnak nevezzük.

7. Definíció (Út). Ha egy séta pontsorozatában nincs ismétlődés, akkor a sétát útnak, illetve körnek nevezzük. (Kör esetén természetesen az első és az utolsó csúcsnak meg kell egyeznie, az ismétlődés tilalma ezekre nem vonatkozik.)

8. Megjegyzés. Ha nincs egy sétában csúcsismétlés, akkor garantáltan nincs élismétlés sem. Tehát egy út egyben vonal is.

9. Definíció (Fokszám). A $G = (V, E)$ gráf egy $v \in V$ pontjának fokszáma, a v pontból kiinduló élek száma azzal a megállpodással, hogy a hurokél kettővel növeli a fokszámot. A v csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.

10. Példa.



$V = \{a, b, c, d, f, g, h, i\}$,
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$,
$e_1\alpha = \{a, b\},\ e_2\alpha = \{b, c\} = e_3\alpha$,
$e_4\alpha = \{d, f\},\ e_5\alpha = \{f, g\},\ e_6\alpha = \{g, h\}$,
$e_7\alpha = \{a, g\},\ e_8\alpha = \{i, d\},\ e_9\alpha = \{f, h\}$,
$e_{10}\alpha = \{b, f\},\ e_{11}\alpha = \{a, c\},\ e_{12}\alpha = \{i\}$.

- A $h, e_9, f, e_4, d, e_8, i, e_{12}, e, e_{12}, i, e_8, d, e_4, f, e_{10}, b, e_3, c, e_2, b$ egy 10 hosszú séta.
- Az $a, e_1, b, e_{10}, f, e_5, g, e_7, a$ egy 4 hosszú zárt séta.
- A $g, e_7, a, e_1, b, e_3, c$ egy 3-hosszú út.
- Az $f, e_5, g, e_6, h, e_9, f$ egy 3-hosszú kör.
- A gráfban: $d(c) = 3$, $d(f) = 4$ és $d(e) = 3$.

A fokszám definíciójából következik az alábbi tétel.

11. Tétel. Egy $G = (V, E)$ gráf esetén a pontok fokszámainak összege megegyezik az élek számának kétszeresével, azaz

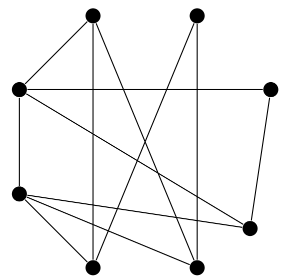
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|\,.$$

12. Definíció. A G gráf egy v pontját izolált pontnak nevezzük, ha v fokszáma nulla.

13. Definíció. Egy gráfot d-regulárisnak nevezünk, ha minden pontjának fokszáma d. Egy gráfot regulárisnak nevezünk, ha valamilyen d-re d-reguláris.

14. Definíció. Egy n-pontú gráf összes pontján végighaladva n darab fokszámot kapunk. Ezeket monoton növekvő sorrendbe rakva kapjuk a gráf fokszámsorozatát.

15. Példa. A 10. Példa gráfjának fokszámsorozata $2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4$. Természetesen egy fokszámsorozathoz több (nem izomorf) gráf is tartozhat. Algoritmikusan megadható olyan egyszerű gráf, melynek ugyanez a fokszámsorozata. Egy ilyen látható a jobb oldali ábrán.

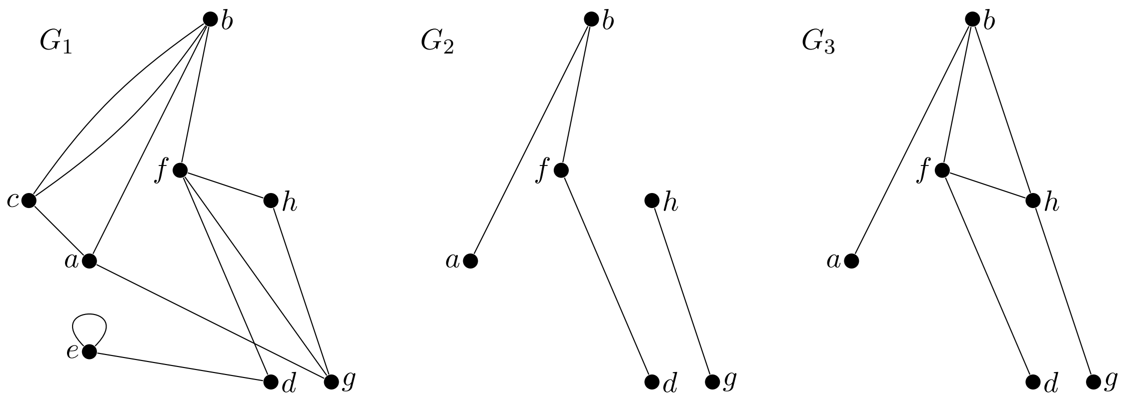


16. Tétel. Pontosan akkor adható meg egy gráf, melynek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a fokszámsorozata, ha $\sum_{i=1}^{n} d_i$ páros.

17. Tétel. Ha egy gráf fokszámsorozata $d_1, d_2, \ldots, d_n$, akkor a páratlan d_i-k száma páros.

18. Definíció. Egy $G = (V, E)$ gráfnak a $H = (V', E')$ gráf egy részgráfja, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$. Azaz a H gráf minden csúcsa a G gráf csúcsai közül kerül ki, és ha H-ban két pont össze van kötve, akkor az a két pont a G-ben is össze van kötve.

19. Példa.



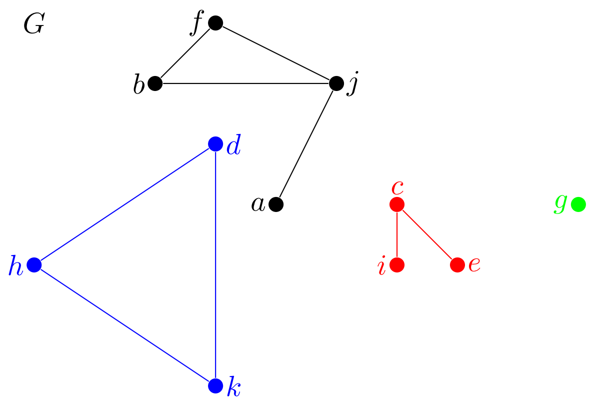
Például a fenti G_2 gráf részgráfja a G_1 gráfnak, viszont a G_3 nem részgráfja.

20. Definíció. Egy gráf összefüggő, ha bármely két pontja között van út. (A nulla hosszú utat is megengedjük, tehát egyetlen izolált pont is összefüggő.)

21. Tétel. Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Ekkor a gráf V ponthalmazának létezik olyan $V_1, V_2, \ldots, V_n$ osztályozása, hogy a különböző V_i-k között nincs él, illetve mindegyik V_i ponthalmaz és a rá illeszkedő élek által meghatározott részgráf összefüggő.

22. Definíció. Az előző tételben szereplő V_i-khez tartozó gráfokat az eredeti gráf összefüggőségi komponenseinek nevezzük.

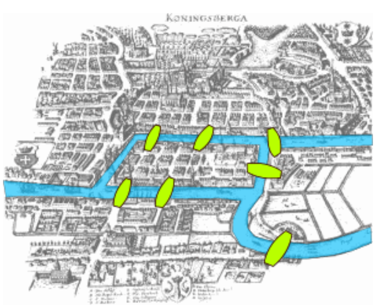
23. Példa.

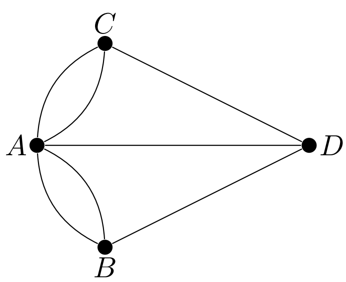


A fenti G gráfnak 4 összefüggőségi komponense van, ezek különböző színnel vannak jelölve a gráfban.

2. Speciális vonalak és utak

Nagyon régi az a probléma, hogy egy gráfot le tudunk-e rajzolni a ceruzánk felemelése nélkül. A probléma megoldása Euler nevéhez fűződik, aki a megoldotta a königsbergi hidak problémáját. A városlakók tették fel Eulernek a kérdést, hogy a városban lévő, Pregel folyón átívelő hét hídon át lehet-e úgy sétálni, hogy mindegyik hídon pontosan egyszer menjünk át, és ugyanoda érkezzünk, ahonnan elindultunk.





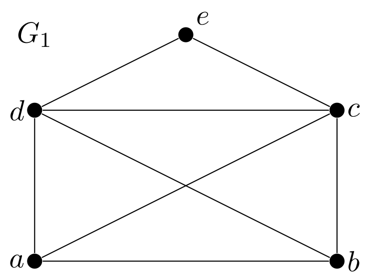
Euler 1736-ban megadta a választ, mely szerint nem lehet. A város ma Kalinyingrád néven ismert, és a világháborúban a hídjait lebombázták, így az eredeti probléma már elvesztette létjogosultságát, azonban ezt a problémát tartják a gráfelmélet első kérdésének.

24. Definíció (Euler-vonal). Egy olyan vonalat, mely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza, Euler-vonalnak nevezzük. Ha a vonal zárt, akkor zárt Euler-vonalnak hívjuk.

25. Tétel. Legyen G egy izolált pont nélküli gráf. Ekkor

- G-ben pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha összefüggő, és minden pont foka páros,
- G-ben pontosan akkor van Euler-vonal, ha összefüggő, és legfeljebb két darab páratlan fokú pontja van.

26. Példa.



A G_1 fokszámsorozata $2, 3, 3, 4, 4$, így ebben nincs zárt Euler-vonal, de Euler-vonal van, például az $a, d, e, c, d, b, c, a, b$ vonal. A G_2 fokszámsorozata $2, 2, 2, 4, 4$, így ebben van zárt Euler-vonal, például az a, d, e, c, d, b, c, a vonal. A G_3 fokszámsorozata $2, 3, 3, 3, 3$, így ebben zárt és nyitott Euler-vonal sincs.

Természetesen adódik a kérdés, hogy az élek helyett mikor tudunk az összes ponton átmenni. Hamilton talált ki egy táblajátékot, melyben egy gráf összes pontján kellett végigmenni pontosan egyszer. Az ő munkásságának tiszteletére nevezték el az ilyen utakat Hamilton-útnak.

27. Definíció (Hamilton-út, Hamilton-kör). Ha egy gráfban egy út minden ponton átmegy, akkor azt Hamilton-útnak nevezzük. Ha egy gráfban egy kör minden ponton átmegy, akkor Hamilton-körnek nevezzük.

Az Euler-vonal létezéséhez kapcsolódó tétel egy nagyon egyszerű karakterizációs tétel volt. Sőt, gyors algoritmus adható, ami Euler vonalat és kört ad meg outputként. Ezzel szemben a Hamilton-út és kör esetén nincs se karakterizációs tétel, se hatékony algoritmus. Ismeretes néhány tétel, mely bizonyos gráfok esetén működik, ezek közül mi csak egyet említünk meg, ami olyan feltételeket tartalmaz, ami elegendő, de nem szükséges.

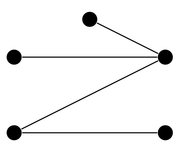
28. Tétel (Dirac tétele). Ha egy egyszerű gráf minden pontjának fokszáma legalább akkora, mint a pontok számának fele, akkor van benne Hamilton-út.

Ha egy egyszerű gráf minden pontjának fokszáma legalább akkora, mint a pontok számának fele, és van legalább 3 pontja, akkor van benne Hamilton-kör.

3. Fák

29. Definíció. Egy G gráfot fának nevezünk, ha hurokmentes, körmentes és összefüggő.

30. Példa. Az alábbi gráf egy fa.



31. Definíció. Egy gráfot minimálisan összefüggőnek nevezünk, ha összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem összefüggő.

32. Definíció. Egy gráfot maximális körmentesnek nevezünk, ha nincs benne kör, de bármely új élt hozzávéve már lenne benne.

33. Tétel (Fák ekvivalens jellemzése). Legyen G egy hurokmentes gráf. Ekkor a következők ekvivalensek.

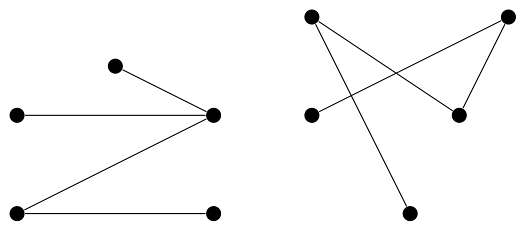
- A G gráf fa.
- A G gráf bármely két különböző pontja között pontosan egy út van.
- A G gráf minimálisan összefüggő.
- A G gráf maximális körmentes.
- A G gráf összefüggő, és eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa.
- A G gráf körmentes, és eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa.

34. Megjegyzés. Egy adott n esetén az n-pontú összefüggő gráfok között egy n-pontú fa a legkevesebb élt tartalmazó gráf.

35. Tétel. Véges, egynél több pontú fában legalább két elsőfokú pont van.

36. Definíció (Erdő). Egy körmentes gráfot erdőnek nevezünk.

37. Példa. Az alábbi gráf egy erdő.



38. Megjegyzés. Az erdő úgy is felfogható, mint fák csúcsdiszjunkt egyesítése.

4. Gráfparaméterek

39. Definíció (Párosítás). Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Két E-beli élt függetlennek vagy idegennek nevezünk, ha a végpontjaik négy különböző csúcsot adnak. Független éleknek egy M halmazát párosításnak nevezzük. Az M párosítást G-ben teljes párosításnak nevezzük, ha G minden pontja valamely M-beli él végpontja. A G gráfban a maximális méretű párosítás elemszámát $\nu(G)$-vel jelöljük, azaz

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

40. Definíció (Lefogó ponthalmaz). Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. A G gráf pontjainak egy S halmazát lefogó ponthalmaznak nevezzük, ha G minden élének legalább az egyik végpontja S-ben van. A G gráfban a minimális méretű lefogó ponthalmaz elemszámát $\tau(G)$-vel jelöljük, azaz

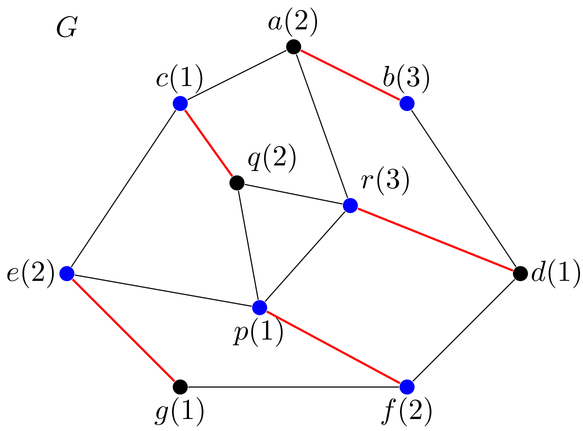
$$\tau(G) = \min\{|S| : S \text{ lefogó ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

41. Tétel. Tetszőleges G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$.

42. Definíció. Egy egyszerű gráfot k-színezhetőnek nevezünk, ha a csúcsai kiszínezhetők k darab színnel úgy, hogy bármely élének a végpontjai különböző színűek. A G gráf kromatikus számának nevezzük azt a legkisebb k számot, mellyel a gráf k-színezhető. A G kromatikus számát $\chi(G)$-vel jelöljük.

43. Példa.

A jobb oldali G gráfban piros élek párosítást, a kék csúcsok pedig lefogó ponthalmazt alkotnak. A csúcsok neve melletti számok a gráfok egy jó 3-színezését jelölik, a felhasznált színek: $1, 2, 3$. A megadott párosítás miatt tudjuk, hogy $5 \leq \nu(G)$. Viszont $\nu(G) < 6$, mert 6 független élhez már 12 csúcsra lenne szükség, de csak 10 csúcsa van. Ebből következik, hogy $\nu(G) = 5$, tehát a pirossal megjelölt $\{ab, cq, dr, pf, eg\}$ párosítás maximális.

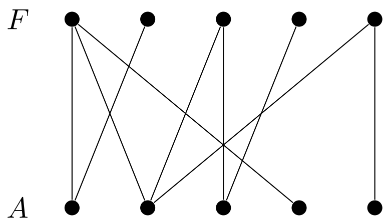


A megadott lefogó ponthalmaz miatt, $\tau(G) \leq 6$. Azonban $6 \leq \tau(G)$ is teljesül, mert van gráfban két csúcsdiszjunkt kör: p, q, r, p és a, b, d, f, g, e, c, a. A 3 hosszú kör lefogásához legalább 2 csúcs, a 7 hosszú kör lefogásához legalább 4 csúcs szükséges. Tehát $\tau(G) = 6$.

A megadott 3-színezés jó, tehát $\chi(G) \leq 3$. Viszont 2 színnel nem tudjuk jól színezni, mert a gráf tartalmaz páratlan kört, például a p, q, r háromszöget. Tehát $\chi(G) = 3$.

5. Páros gráfok

44. Definíció (Páros gráf). Egy $G = (V, E)$ gráfot páros gráfnak nevezünk, ha a pontjai olyan A és F diszjunkt halmazba osztályozhatók, hogy minden E-beli él egyik végpontja A-ban, a másik pedig F-ben van. Az A és F halmazokat a páros gráf két színosztályának nevezzük.



45. Tétel. A G gráf pontosan akkor páros gráf, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

46. Tétel. Ha a G páros gráfban van teljes párosítás, akkor a két színosztály elemszáma megegyezik.

47. Tétel (Kőnig-tétel). Ha G egy véges páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

48. Definíció. Legyen M egy tetszőleges párosítás G-ben. A $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ utat M-re vonatkozó javító alternáló útnak nevezzük, ha v_0 és v_k nem illeszkedik egyetlen M-beli élre sem, k páratlan, továbbá $e_2, e_4, \ldots, e_{k-1} \in M$ (és így $e_1, e_3, \ldots, e_k \notin M$).

49. Tétel. Legyen G egy gráf és benne M egy párosítás. Ha létezik $P\colon e_1, e_2, \ldots, e_k$ javító alternáló út M-re nézve, akkor M nem maximális elemszámú párosítás. Ekkor az $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$ párosítás nagyobb elemszámú M-nél. Azaz M' abban különbözik M-től, hogy elhagyjuk M-ből azokat az éleket, amelyek benne vannak a javító útban, és hozzáadjuk a javító út azon elemeit, melyek nincsenek M-ben.

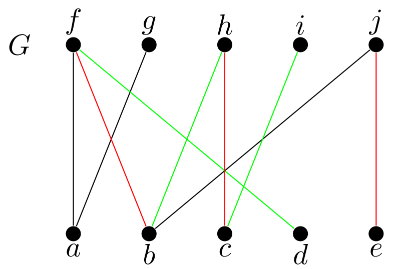
50. Tétel (Berge tétele). Legyen G egy gráf és M egy nem optimális párosítás G-ben. Ekkor létezik M-re vonatkozó javító alternáló út.

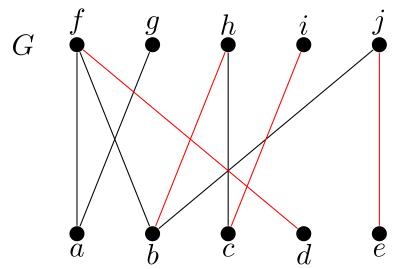
51. Algoritmus (Magyar-módszer: Maximális párosítás keresése javító alternáló utak segítségével).

Input: G gráf.
Kiinduló lépés: legyen M egy tetszőleges párosítás.
Általános lépés: keresünk M-re vonatkozóan javító utat.

- Ha találunk, akkor a 49. Tételben leírt módon az M párosítást lecseréljük, és újra futtatjuk az általános lépést.
- Ha nem találunk javító utat, akkor M maximális elemszámú párosítás.

52. Példa. Az alábbi bal oldali ábrán a piros élek a G gráfon egy $M = \{bf,\ ch,\ ej\}$ párosítást adnak. Ha a bf és ch élekhez a zöld éleket hozzávesszük, akkor i-ből d-be menő javító alternáló utat kapunk. A 49. Tételben leírt módon a javító útban szereplő M-beli éleket lecseréljük az út M-en kívüli éleire. Mivel az alternáló út páratlan hosszú, és M-en kívüli éllel kezdőik (és végződik), így a párosítás elemszámát növeltük. A jobb oldali ábrán az új párosításban szereplő éleket jelöltük pirossal.





53. Megjegyzés. Az előző algoritmus tetszőleges gráfokra működik. Az egyetlen problémát az jelenti, hogyan keressünk a gráfokban javító alternáló utat. Kőnig Dénes és Egerváry Jenő megadtak egy algoritmust arra az esetre, amikor az input G gráf páros. Az ő tiszteletükre nevezték el az algoritmust magyar módszernek (Hungarian method).

54. Definíció. Egy $X \subseteq V$ csúcshalmaz szomszédságát $N(X)$-szel jelöljük, és olyan csúcsokat sorolunk az $N(X)$ halmazba, melyek valamelyik X halmazbeli csúccsal össze vannak kötve.

55. Tétel (Kőnig–Hall-tétel). Legyen G egy páros gráf A, F pontosztályokkal. Pontosan akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha bármely $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|N(X)| \geq |X|$.

56. Tétel. Legyen G egy páros gráf A, B pontosztályokkal. Pontosan akkor létezik teljes párosítás G-ben, ha $|A| = |F|$ és bármely $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$.

57. Tétel. Minden reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás.

6. Síkgráfok

58. Definíció (Síkgráf). Egy G gráfot síkgráfnak nevezünk, ha lerajzolható a síkra úgy, hogy az élei (amik esetleg görbe vonalak) csak csúcsoknál találkoznak, és nem metszik egymást más pontban. A G egy ilyen lerajzolását síkbeli térképnek nevezzük. Egy síkbeli térkép élei által határolt területeket tartományoknak (országoknak) nevezzük. (A sík helyett tetszőleges felülettel lehetne dolgozni, így értelme van például gömbre vagy tóruszra való lerajzolásról beszélni.)

59. Tétel (Euler-tétel). Legyen G egy olyan síkbeli térkép, melynek n csúcsa, e éle és t tartománya van. Ekkor $n + t = e + 2$.

60. Definíció (Topologikus részgráf). Ha a T gráfot úgy kapjuk egy G gráfból, hogy

- G néhány csúcsát (a hozzá kapcsolódó élekkel együtt) elhagyjuk,
- G néhány élét elhagyjuk,
- G egy 2-fokú csúcsát elhagyjuk, és a rajta lévő két élt egybe kapcsoljuk vagy
- az előzőeket véges sokszor alkalmazzuk egymás után,

akkor a T gráfot a G gráf topologikus részgráfjának nevezzük.

61. Jelölés. Jelölje K_5 azt az 5-pontú gráfot, ahol bármely két különböző pont között pontosan egy él van. Jelölje $K_{3,3}$ azt a páros gáfot, ahol a pontosztályok 3-3 eleműek, és a pontosztályok között minden pontból minden pontba pontosan egy él vezet.

62. Tétel (Kuratowszki-tétel). A G gráf pontosan akkor síkgráf, ha a K_5 és $K_{3,3}$ nem topologikus részgráfja.

63. Tétel (Négyszíntétel). Minden egyszerű G síkgráf esetén $\chi(G) \leq 4$.