2. feladatsor – Számelmélet

2.1. Feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.

(a) $a = 78$, $b = 30$;
(b) $a = 368$, $b = 161$;
(c) $a = 539$, $b = 1001$;
(d) $a = -1253$, $b = -3241$;
(e) $a = -1183$, $b = 1573$.

2.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket.

(a) $72x + 60y = 24$; (b) $78x + 30y = 12$; (c) $18x + 21y = 9$;
(d) $21x + 36y = 12$; (e) $21x - 15y = 12$; (f) $6x - 10y = 22$
(g) $237x + 571y = 13$; (h) $197x + 418y = 17$.

2.3. Feladat. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(11x - 8y = 3)$ és $10 \leq x \leq 30\}$;
(b) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(7x - 3y = 13)$ és $10 \leq x \leq 30\}$;
(c) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(7x - 19y = 10)$ és $15 \leq y \leq 35)\}$;
(d) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(13x - 20y = 7)$ és $20 \leq y \leq 40)\}$.

2.4. Feladat. Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot. (Az összes megoldást adjuk meg.)

2.5. Feladat. Háromféle bélyeget vásároltunk. Az első alkalommal az egyes fajtákból rendre 3, 5 és 7 darabot, a második alkalommal 11, 13 és 9 darabot. A számla első alkalommal 110 Ft, a második alkalommal 250 Ft volt. Milyen címletű bélyegeket vásároltunk?

2.6. Feladat. Valaki a következőket mondta: „A barátnőm 22. születésnapjára 22 szál virágból álló csokrot vettem 2000 forintért. A csokor fréziából, nárciszból és rózsából állt, amelyekből egy szál 50 forintba, 70 forintba, illetve 130 forintba került” Hány szál virágot tartalmazott az egyes fajtákból a csokor, ha azt is tudjuk, hogy mindegyikből legalább két szál volt, és semelyik kettőből sem volt ugyanannyi?

2.7. Feladat. Egy 5 m hosszú kerítés szegélyének elkészítéséhez 15 cm, 20 cm és 93 cm hosszúságú lécek állnak rendelkezésünkre. Az egyes lécfajták felszegeléséhez rendre 2, 3 és 9 szög kell. Mennyire van szükségünk a lécekből, ha 50 szegünk van, és ezeket mind fel is akarjuk használni?

2.8. Feladat. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 12 darab pozitív osztója van?

2.9. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $6x \equiv 4 \pmod{8}$; (b) $13x \equiv -3 \pmod{34}$; (c) $88x \equiv 42 \pmod{55}$;
(d) $5x \equiv 24 \pmod{13}$; (e) $9x \equiv 15 \pmod{12}$; (f) $29x \equiv 17 \pmod{73}$.

2.10. Feladat. Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékul?

2.11. Feladat. Határozza meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékul 30-cal osztva.

2.12. Feladat.

(a) $\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod 8, \\ x &\equiv 6 \pmod 7; \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 5, \\ x &\equiv 4 \pmod 7; \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 2, \\ x &\equiv 6 \pmod 5; \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 3x &\equiv 15 \pmod{24}, \\ 4x &\equiv 11 \pmod{21}; \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod 6, \\ 7x &\equiv 9 \pmod{10}; \end{aligned}$ (f) $\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 5, \\ x &\equiv 1 \pmod 6, \\ x &\equiv 7 \pmod 9; \end{aligned}$

(g) $\begin{aligned} 2x &\equiv 18 \pmod{10}, \\ 10x &\equiv 40 \pmod{12}, \\ 15x &\equiv 9 \pmod{21}; \end{aligned}$ (h) $\begin{aligned} 10x &\equiv 16 \pmod 9, \\ 6x &\equiv 3 \pmod{21}, \\ 3x &\equiv 2 \pmod 5; \end{aligned}$

(i) $\begin{aligned} 3x &\equiv 1 \pmod 5, \\ 5x &\equiv 3 \pmod 7, \\ 13x &\equiv 4 \pmod 9; \end{aligned}$ (j) $\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod 5, \\ 5x &\equiv -1 \pmod 6, \\ 4x &\equiv 11 \pmod 9. \end{aligned}$

2.13. Feladat. Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Ha a szurkolók 4 busszal érkeznek, és 5 fős csoportokban engedik be őket, akkor az utolsó csoportban csak 3 szurkoló marad. Ha 13 busszal érkeznek, és 8-as csoportokban nyernek bebocsátást, akkor szintén 3 szurkoló lesz az utoljára beengedett csoportban. Míg ha 16 busszal érkeznek szurkolók, és egyszerre 9-et léptetnek be, akkor végül 5 szurkoló marad. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

2.14. Feladat. Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

2.15. Feladat. A mai napon (2013. január 18-án) péntek van. Milyen nap lesz 7770016^{6664} nap múlva?

2.16. Feladat. Számoljuk ki az Euler-féle φ függvény következő értékeit.

(a) $\varphi(20)$; (b) $\varphi(75)$; (c) $\varphi(88)$; (d) $\varphi(128)$; (e) $\varphi(360)$.

2.17. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.

(a) $2\varphi(x) = x$; (b) $3\varphi(x) = x$; (c) $\varphi(x) = x - 8$;
(d) $\varphi(x) = x - 10$; (e) $\varphi(x^2) = 2x$; (f) $\varphi(x^2) = x\varphi(x)$.

2.18. Feladat. Határozzuk meg, hogy az a szám milyen maradékot ad n-nel osztva.

(a) $a = 3^{65},\ n = 128$; (b) $a = 19^{81},\ n = 75$; (c) $a = 63^{42},\ n = 50$;
(d) $a = 42^{62},\ n = 25$; (e) $a = 13^{321^{50}},\ n = 87$; (f) $a = 91^{441^{222}},\ n = 88$.

2.19. Feladat. A mai napon (2013. január 21-én) hétfő van. Milyen nap lesz $712^{185^{937}}$ nap múlva?

2.20. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor

$$n \mid 2^{(n-1)!} - 1.$$