Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. feladatsor – Ítéletkalkulus elemei

1.1. Feladat.

(a) $B \vee C$
(b) $B \wedge (\neg C)$
(c) $\neg A$
(d) $B \to C$
(e) $B \leftrightarrow A$

1.2. Feladat.
8 darab részformula van: A, B, C, $\neg B$, $\neg C$, $(\neg C) \to B$, $A \vee (\neg B)$, $((\neg C) \to B) \to (A \vee (\neg B))$

1.3. Feladat. **(c)** $A \leftrightarrow \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big)$

1.4. Feladat.

(a) $(A \vee B) \to (C \wedge D)$
(b) $A \to (\neg B \vee (B \wedge C))$
(c) $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$
(d) $A \leftrightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
(e) $A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D))$
(f) $(A \wedge B) \to (C \vee D)$
(g) $A \to (B \leftrightarrow \neg C)$
(h) $A \to (\neg B \wedge (\neg C \to \neg D))$
(i) $A \vee (B \wedge C)$
(j) $A \wedge (B \to \neg C)$
(k) $A \to (B \vee (C \wedge B))$

1.5. Feladat.

(a) $(\neg A \wedge \neg B) \to (C \leftrightarrow D) = h$
(b) $(A \wedge B) \to (C \leftrightarrow (\neg D \vee E)) = i$
(c) $(A \wedge B) \to (C \to (D \vee E)) = h$

1.6. Feladat.

(a) A : „Esik az eső.”, B : „Megfázom.”, C : „Hideg van.”
(1) $A \wedge \neg B$
(2) $(C \vee A) \to B$
Ha (1) igaz, akkor $A = i$, $B = h$. Ebben az esetben (2) mindig hamis.

(b) A : „Piroska szereti a Farkast.”, B : „Nagyi epret evett.”, C : „A Farkas megeszi a Nagyit.”, D : „A Vadász lelőtte a Farkast.”
(1) $A \wedge (\neg B \to C)$, $C \to \neg A$, D
(2) $D \to (B \leftrightarrow (\neg(A \vee C)))$
Ha az (1) állítások egyszerre igazak, akkor a változók egyértelműen determináltak: $A = B = D = i$, $C = h$. Ennél a kiértékelésnél a (2) állítás hamis.

(c) A : „Hófehérke megeszi a mérgezett almát.”, B : „Hófehérke egyedül marad otthon.”, C : „Hófehérke főz.”, D : „Hófehérke takarít.”
(1) $A \leftrightarrow B$, $A \to (\neg C \wedge \neg D)$, B
(2) $B \to (C \leftrightarrow \neg D)$, $(B \to A) \wedge (\neg B \to (\neg C \wedge \neg D))$
Ha az (1) állítások egyszerre igazak, akkor a változók egyértelműen determináltak: $A = B = i$, $C = D = h$. Ennél a kiértékelésnél a (2) állítások közül az első hamis, a második igaz.

1.7. Feladat.

(a) (1): $(\neg A \vee B) \to C$
(2): $(\neg A \to C) \wedge (B \to C)$
(1) $\equiv$ (2)

(b) (1): $A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$
(2): $(B \vee C \vee A) \wedge ((\neg B \vee \neg C) \to \neg A)$
(1) $\not\equiv$ (2)

(c) (1): $\neg A \to (B \leftrightarrow C)$
(2): $(A \vee \neg C \vee B) \wedge ((\neg A \wedge \neg C) \to \neg B)$
(1) $\equiv$ (2)

1.8. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

(a)

$(A$	$\wedge$	$B)$	$\to$	C	$\equiv$	A	$\to$	$(B$	$\to$	$C)$
i	i	i	**i**	i		i	**i**	i	i	i
i	i	i	**h**	h		i	**h**	i	h	h
i	h	h	**i**	i		i	**i**	h	i	i
i	h	h	**i**	h		i	**i**	h	i	h
h	h	i	**i**	i		h	**i**	i	i	i
h	h	i	**i**	h		h	**i**	i	h	h
h	h	h	**i**	i		h	**i**	h	i	i
h	h	h	**i**	h		h	**i**	h	i	h

A többi feladatot is hasonlóan lehet ellenőrizni: fel kell írni az ekvivalenciajel két oldalán lévő formulák igazságtáblázatát, és ellenőrizni kell, hogy minden kiértékelésnél ugyanaz a logikai érték jön-e ki.

1.9. Feladat.

(a) Nem tautológia
(b) Tautológia
(c) Nem tautológia
(d) Tautológia
(e) Tautológia
(f) Tautológia
(g) Tautológia

1.10. Feladat.

(a) Kielégíthető, sőt tautológia.
(b) Kielégíthető, pl. $A = B = C = D = E = G = h$.
(c) Kielégíthető, pl. $A = B = C = i$, $D = h$.

1.11. Feladat.

F_1 : (nem teljes) diszjunktív normálforma
F_2 : nem diszjunktív normálforma
F_3 : teljes diszjunktív normálforma
F_4 : teljes diszjunktív normálforma

1.12. Feladat.

(a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C) \equiv (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$;
(c) $(A \vee B) \to \big(\neg(C \to B)\big) \equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(d) $(A \vee (\neg B)) \to (C \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \to (\neg B)) \vee (A \wedge B)) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$;
(f) $(\neg(A \to B)) \wedge \big(((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B\big) \equiv (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$.

2. feladatsor – Predikátumkalkulus elemei

2.1. Feladat.

(a) A 7 páros szám.
(b) A 4 négyzetszám, és 12 nemnegatív.
(c) Minden szám 4-szerese osztható 2-vel.
(d) A 6-nak létezik páros osztója.
(e) Minden 4-gyel osztható szám páros.
(f) Minden négyzetszámnak van páros többszöröse.
(g) Létezik olyan páros szám, melynek nincs páros negatív osztója.

2.2. Feladat.
Részkifejezések: x, a, y, $f(x,a)$, $f(y,x)$.
Részformulák: $P(f(x,a),x)$, $(\forall x)P(f(x,a),x)$, $Q(x)$, $P(f(y,x),y)$, $P(f(y,x),y)$, $P(f(y,x),y) \wedge Q(x)$, $(\exists y)(P(f(y,x),y) \wedge Q(x))$, $(\forall x)P(f(x,a),x) \to (\exists y)(P(f(y,x),y) \wedge Q(x))$.
Pirossal jelölve a kötött előfordulás, zölddel a szabad előfordulás:

$$(\forall x)\, P\left(f\left(x,a\right),x\right) \to (\exists y)\left(P\left(f\left(y,x\right),y\right) \wedge Q\left(x\right)\right).$$

Tehát y kötött változó, mert minden előfordulása kötött; x vegyes változó, mert van szabad és kötött előfordulása is.

2.3. Feladat.

(a) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg V(x))$
(b) $(\forall x)(H(x) \to V(x))$
(c) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg(\exists y)B(y,x))$
(d) $(\exists x)(H(x) \wedge (\forall y)(T(y,x) \to C(y,x)))$
(e) $(\exists x)(F(x) \wedge \neg(\exists y)(\neg F(y) \wedge T(y,x)))$
(f) $(\forall x)\left(A\left(x\right) \to \neg F\left(x\right)\right) \wedge (\exists x)\left(\neg F\left(x\right) \wedge \neg A\left(x\right)\right)$
(g) $(\forall x)\left(B\left(x,p\right) \to H\left(x\right)\right)$
(h) $(\exists x)\left(H\left(x\right) \wedge \left(\neg S\left(a\left(x\right)\right)\right)\right)$
(i) $S\left(a\left(p\right)\right)$

2.4. Feladat.
Predikátumok: $O(x,y)$: „x osztja y-t”, $N(x)$: „x nullára végződik”, $P(x)$: „x pozitív”, $K(x,y)$: „x kisebb y-nál”.
Függvények: $f(x)$: „x négyzete”.

(a) $(\forall x)(O(1,x) \wedge O(x,x))$
$\neg\left[(\forall x)(O(1,x) \wedge O(x,x))\right] \equiv (\exists x)(\neg O(1,x) \vee \neg O(x,x))$
(b) $(\forall x)(\exists y)K(y,x)$
$\neg\left[(\forall x)(\exists y)K(y,x)\right] \equiv (\exists x)(\forall y)\neg K(y,x)$
(c) $(\forall x)(O(10,x) \to N(x))$
$\neg\left[(\forall x)(O(10,x) \to N(x))\right] \equiv (\exists x)(O(10,x) \wedge \neg N(x))$
(d) $(\exists x)(K(x,0) \wedge P(f(x)))$
$\neg\left[(\exists x)(K(x,0) \wedge P(f(x)))\right] \equiv (\forall x)(\neg K(x,0) \vee \neg P(f(x)))$

(e) $(\forall x)(P(x) \vee K(x,0))$
$\neg\left[(\forall x)(P(x) \vee K(x,0))\right] \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg K(x,0))$

2.5. Feladat.
Individuumkonstansok: m: „Mézga Géza”.
Predikátumok: $I(x)$: „x informatikus”; $E(x)$: „x éhes”; $S(x)$: „x szakács”; $K(x,y)$: „x kedveli y-t”; $F(x,y)$: „x főz y-nak”; $Sz(x)$: „x szerencsés”; $G(x,y)$: „x gyermeke y-nak”.
Függvények: $g(x)$: „x gyereke”.

(a) $(\forall x)(I(x) \to E(x))$
Tagadása: $(\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$, *Van olyan informatikus, aki nem éhes.*
(b) $(\forall x)((E(x) \wedge S(x)) \to F(x,x))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge S(x) \wedge \neg F(x,x))$, *Van olyan éhes szakács, aki nem főz magának.*
(c) $(\forall x)((E(x) \wedge I(x)) \to (\forall y)(S(y) \to K(x,y)))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge I(x) \wedge (\exists y)(S(y) \wedge \neg K(x,y)))$, *Van olyan éhes informatikus, aki nem kedvel minden szakácsot.*
(d) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(F(x,y) \to I(y)))$,
Tagadása: $(\forall x)(S(x) \to (\exists y)(F(x,y) \wedge \neg I(x)))$, *A szakácsok nem csak informatikusoknak főznek.*
(e) $(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge F(y,x) \wedge S(y)) \to K(x,y))$,
Tagadása: $(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge F(y,x) \wedge S(y) \wedge \neg K(x,y))$, *Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.*
(f) $\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x,m) \to Sz(x))$,
Tagadása: $Sz(m) \vee (\exists x)(G(x,m) \wedge \neg Sz(x))$, *Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.*
(g) $(S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x)) \to (\forall x)Sz(x)$,
Tagadása: $S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x) \wedge (\exists x)\neg Sz(x)$, *Mézga Géza a szakács, senki sem éhes, és van aki nem szerencsés.*

2.6. Feladat.

(a) Igen.
(b) Igen.

2.7. Feladat.

(a) Igen.
(b) Nem.
(c) Igen.
(d) Igen.

3. feladatsor – Halmazok

3.1. Feladat.

(a) Igaz
(b) Igaz
(c) Igaz
(d) Igaz
(e) Hamis
(f) Igaz
(g) Igaz
(h) Igaz

3.2. Feladat.

- $A \cup B = \{a, b, c, d, e\} = U$;
- $A \cap B = \{d\}$;
- $\overline{B} = \{a, b, c\}$;
- $A \setminus B = \{a, b, c\}$;
- $A \triangle B = \{a, b, c, e\}$;
- $\left(A \triangle \overline{C}\right) \setminus \overline{B} = \emptyset$;
- $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{d\}, \{e\}, \{d, e\}\}$.

3.3. Feladat.

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \quad B = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

- $A \cup B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$
- $A \cap B = \{\emptyset, \{b\}\}$
- $A \setminus B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- $B \setminus A = \{\{c\}, \{b, c\}\}$
- $A \triangle B = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

3.4. Feladat. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

3.5. Feladat.

(a) Igen
(b) Igen
(c) Nem
(d) Nem
(e) Nem
(f) Nem

3.6. Feladat.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}\}$
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}\}$
(d) Nincs ilyen osztályozás.

3.7. Feladat.

(a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$
(b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$
(c) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$
(d) $A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$
(g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$

3.8. Feladat. $\overline{A \cup (B \cap (C \cup D))} = \overline{A} \cap \left(\overline{B} \cup \left(\overline{C} \cap \overline{D}\right)\right)$

3.9. Feladat. Van: $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

3.10. Feladat. $A \subseteq B$ teljesül, $A = B$ és $B \setminus A = \emptyset$ nem teljesül.

3.11. Feladat.

(a)

$$\begin{aligned} x \in (A \cap C) \cup (B \cap D) &\longleftrightarrow x \in (A \cup (B \cap D)) \cap (C \cup (B \cap D)) \\ &\longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup D) \cap (C \cup B) \cap (C \cup D) \\ &\longrightarrow x \in (A \cup B) \cap (C \cup D) \end{aligned}$$

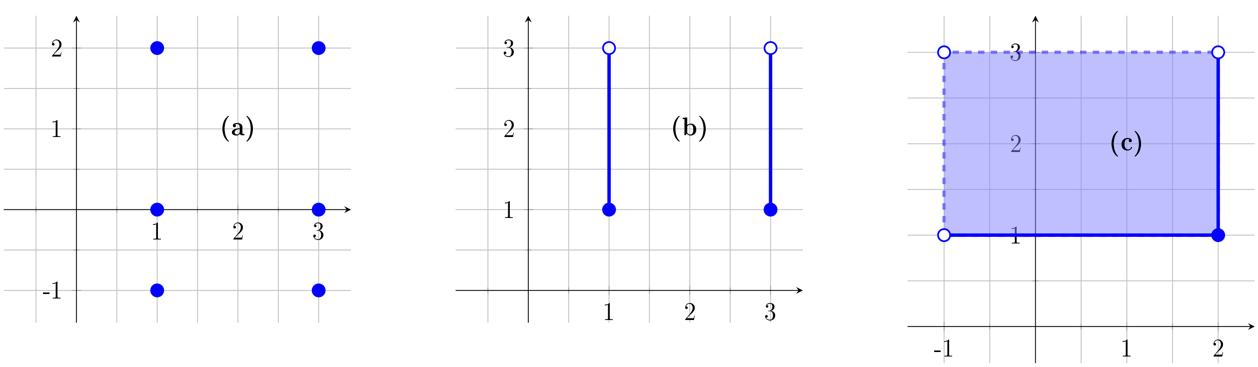
(b)

$$\begin{array}{lll} & & x \in C \cup D \longrightarrow x \notin B \cap \overline{(C \cup D)} = B \setminus (C \cup D) \\ & \nearrow & \\ x \in A \cap C \cap D & & \\ & \searrow & \\ & & x \in A \cap C \\ \longrightarrow & x \in & (A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \end{array}$$

3.12. Feladat.

- $A \sqcap A = \overline{A \cap A} = \overline{A}$
- $(A \sqcap B) \sqcap (A \sqcap B) = \overline{A \sqcap B} = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$
- $A \cup B = (A \sqcap A) \sqcap (B \sqcap B)$

3.13. Feladat.



3.14. Feladat.

Igen

Nem

Igen

Nem

4. feladatsor – Relációk

4.1. Feladat.

$\alpha^{-1} = \{(2,1), (2,3), (4,3), (4,4), (5,5)\}$
$\alpha\beta = \{(1,2), (3,2), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)\}$
$\beta\alpha = \{(4,2), (4,4), (4,5)\}$
$\beta\alpha^{-1} = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3), (4,5)\}$
$\alpha\beta^{-1} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3), (5,4)\}$

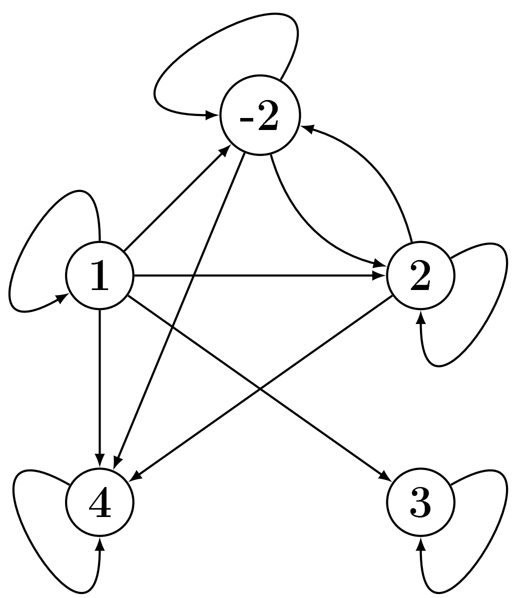
4.2. Feladat.

(a) $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{E}^2 : \ x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$
$\alpha\beta = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : \ y \text{ az } x \text{ nagyapja}\}$
$\beta\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : \ y \text{ az } x \text{ apai nagyszülője}\}$

(b) $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 2y\}$
$\alpha\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 2^{y+1}\}$
$\beta\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 4^y\}$

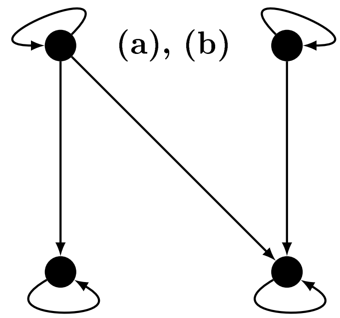
(c) $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$
$\alpha\beta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 = \frac{y-1}{3}\right\}$
$\beta\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (3x+1)^2 = y\right\}$

4.3. Feladat.



Reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom.

4.4. Feladat.



(c): Nincs ilyen gráf, minden dichotom reláció reflexív.

4.5. Feladat.

	Refl.	Szimm.	Antiszimm.	Tranz.	Dich.	Ekv.	R.r.
(a)	✓	✓	×	×	×	×	×
(b)	✓	×	✓	✓	✓	×	✓
(c)	×	×	✓	✓	×	×	×
(d)	✓	✓	×	×	×	×	×
(e)	✓	×	×	✓	✓	×	×
(f)	✓	✓	×	✓	×	✓	×
(g)	✓	✓	×	✓	×	✓	×
(h)	✓	✓	×	✓	×	✓	×
(i)	×	×	✓	✓	×	×	×
(j)	✓	✓	×	✓	×	✓	×

4.6. Feladat.

$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\}$

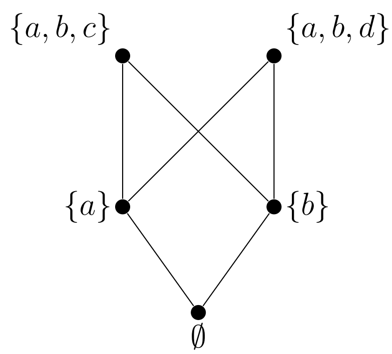
$\varrho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,5),(5,3),(5,5),(4,4)\}$

4.7. Feladat.

(a) $\{\{-3,-2,-1\},\ \{1,2,3\}\}$
(b) $\{\{-3,0,3\},\ \{-2,1\},\ \{-1,2\}\}$
(c) $\{\{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\},\{0\}\},\ \{\{1,2\},\{a,b\}\},\ \{\{1,2,3\}\}\}$
(d) $\{\{2,8,14,26\},\ \{3,9,15\},\ \{19\}\}$
(e) $\{\{71,602\},\ \{301,4,121\},\ \{216,54,315\}\}$
(f) $\{\{0\},\ \{-1,1\},\ \{-2,2\},\ \{-3,3\},\ \ldots\} = \{\{a,-a\}\colon a \in \mathbb{Z}\}$
(g) $\{\{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\},\ \{\ldots,-3,-1,1,3,\ldots\}\}$

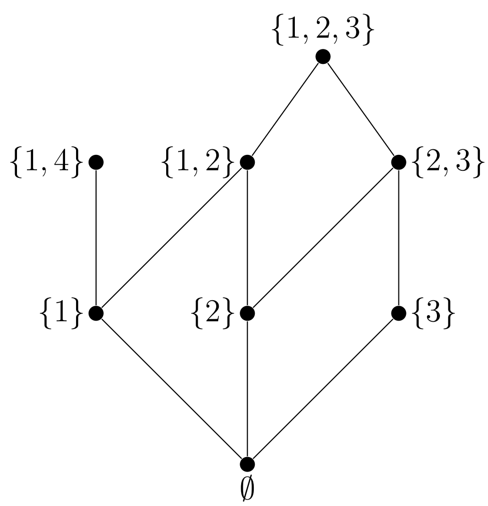
4.8. Feladat.

(a)



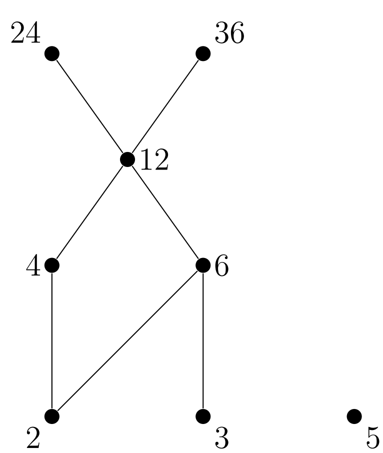
Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: $\emptyset$.
Maximális elemek: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$.
Minimális elem: $\emptyset$.

(b)



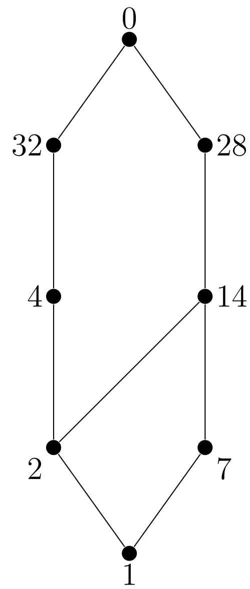
Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: $\emptyset$.
Maximális elemek: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4\}$.
Minimális elem: $\emptyset$.

(c)



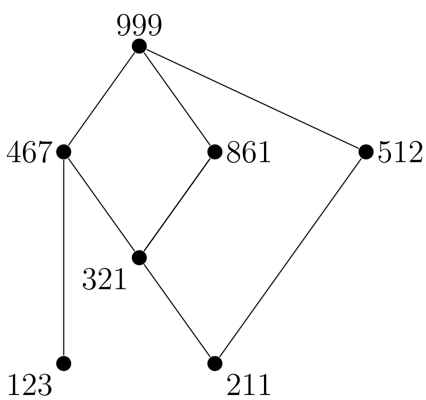
Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: nincs.
Maximális elemek: 24, 36, 5.
Minimális elemek: 2, 3, 5.

(d)



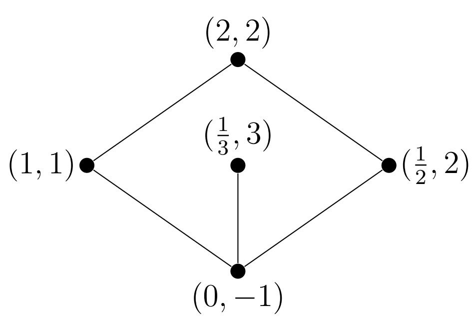
Legnagyobb elem: 0.
Legkisebb elem: 1.
Maximális elem: 0.
Minimális elem: 1.

(e)



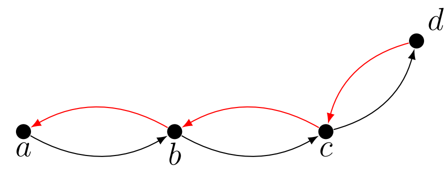
Legnagyobb elem: 999.
Legkisebb elem: nincs.
Maximális elem: 999.
Minimális elemek: 123, 211.

(f)

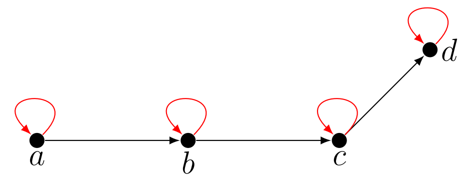


Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: $(0, -1)$.
Maximális elemek: $(2, 2)$, $(\frac{1}{3}, 3)$.
Minimális elem: $(0, -1)$.

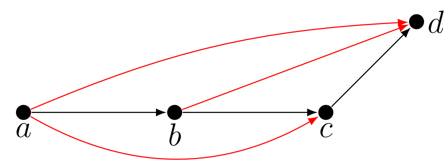
4.9. Feladat.
Szimmetrikus lezárt:



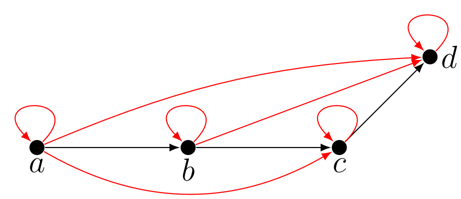
Reflexív lezárt:



Tranzitív lezárt:

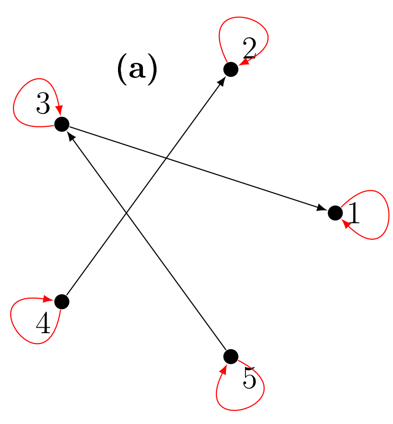


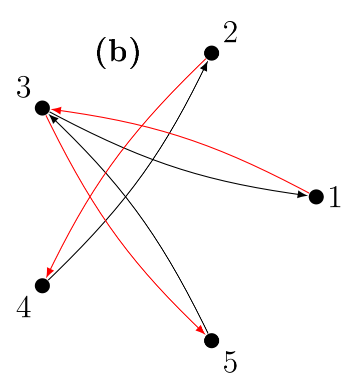
Reflexív és tranzitív lezárt:

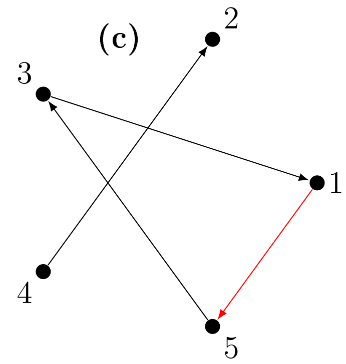


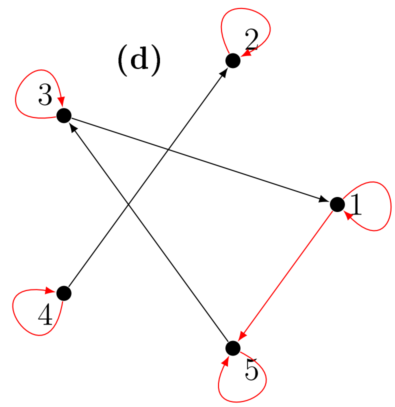
4.10. Feladat.

(a) ρ reflexív lezártja: $\{(4,2),(3,1),(5,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$
(b) ρ szimmetrikus lezártja: $\{(a,b)\colon |a-b|=2\}$
(c) ρ tranzitív lezártját: $\rho^+ = \rho \cup \{(1,5)\}$
(d) ρ reflexív és tranzitív lezártja: $\rho^* = \{(4,2),(3,1),(5,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5)\}$









4.11. Feladat.

(a) $\rho^+ = \{(a,b) \in A^2 \colon |a-b| \text{ is even}\}$, ahol $A = \{1,2,3,4,5\}$
(b) $\tau^+ = \tau$
(c) $\alpha^+ = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon \exists k \in \mathbb{Z}^+ \colon b = a^{2k}\}$
(d) $\beta^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \exists k \in \mathbb{Z}^+ \colon y - x = k\}$

5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat.

(a) ÉT: $x \in \mathbb{R}$, ÉK: $y \geq 0$, leképezés.
(b) ÉT: $x \geq 0$, ÉK: $y \in \mathbb{R}$, nem leképezés.
(c) ÉT: $x > 0$, ÉK: $y \in \mathbb{R}$, leképezés.

5.2. Feladat.

(a) $\alpha\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2 + 1$
(b) $\alpha\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3^{2^x - 2}$
(c) $\alpha\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} - 1)$

5.3. Feladat.

(a) Nem injektív, nem szürjektív.
(b) Nem injektív, szürjektív.
(c) Nem injektív, nem szürjektív.
(d) Nem injektív, nem szürjektív.
(e) Injektív, nem szürjektív.
(f) Nem injektív, szürjektív.
(g) Nem injektív, szürjektív.
(h) Nem injektív, szürjektív.
(i) Injektív, nem szürjektív.
(j) Nem injektív, szürjektív.

5.4. Feladat.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2$
(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x\beta = x^2$
(c) $\gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x\gamma = x^2$
(d) $\delta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\delta = x^2$

Az α leképezés nem szürjektív, mert a -9 nem áll elő egyetlen valós szám négyzeteként sem.
A β leképezés szürjektív, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y} \mapsto y$. Viszont nem bijektív, mert $(-4)\beta = 4\beta$.
A γ leképezés injektív, mert különböző pozitív valós számoknak a négyzete is különböző. Viszont nem szürjektív, mert mert a -9 nem áll elő egyetlen pozitív valós szám négyzeteként sem.
A δ leképezés bijektív. Injektív: tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ és $a^2 = b^2$. Ekkor $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$, sőt $a = b$, mivel a leképezés indulási halmaza most $\mathbb{R}$. Szürjektív: tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ szám esetén $\sqrt{y} \mapsto y$.

5.5. Feladat.

(a) Tegyük fel, hogy $x\alpha = y\alpha$. Ekkor

$$\begin{aligned} x\alpha &= y\alpha \\ 3x - 1 &= 3y - 1 \\ 3x &= 3y \\ x &= y. \end{aligned}$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén $\frac{y+1}{3} \in \mathbb{R}$ és $\frac{y+1}{3} \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze:

$$\alpha^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+1}{3}.$$

(b) Tegyük fel, hogy $x\beta = y\beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} x\beta &= y\beta \\ (x+2)^2 - 4 &= (y+2)^2 - 4 \\ (x+2)^2 &= (y+2)^2 \\ |x+2| &= |y+2| \\ x+2 &= y+2 \\ x &= y. \end{aligned}$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y+4} - 2 \in \mathbb{R}^+$ és $\sqrt{y+4} - 2 \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze:

$$\beta^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \sqrt{x+4} - 2.$$

5.6. Feladat.

(a) $\alpha\colon (1,6) \to (4,7),\ x\alpha = \frac{3}{5}x + \frac{17}{5}$
(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 2^x$
(c) $\gamma\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ x\gamma = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$

5.7. Feladat.

(a) Igen
(b) Igen
(c) Nem
(d) Igen
(e) Nem
(f) Nem
(g) Igen
(h) Igen
(i) Nem

5.8. Feladat.

(a) Mindenkit átküld az 1-gyel nagyobb számú szobába, és az új vendéget berakja az 1-es szobába, mert az üres lett.
(b) Mindenkit át kell küldeni a 999999-cel nagyobb szobába, így az első 999999 számú szobák üresen maradnak. Oda elfér a 999999 új vendég.
(c) Mindenki menjen át a kétszer akkora számú szobába, mint amiben most van. Ekkor a páratlan számú szobák üresen maradnak, tehát megszámlálhatóan végtelen sok szoba üres marad, oda mehetnek az új vendégek.

6. feladatsor – Komplex számok, polinomok

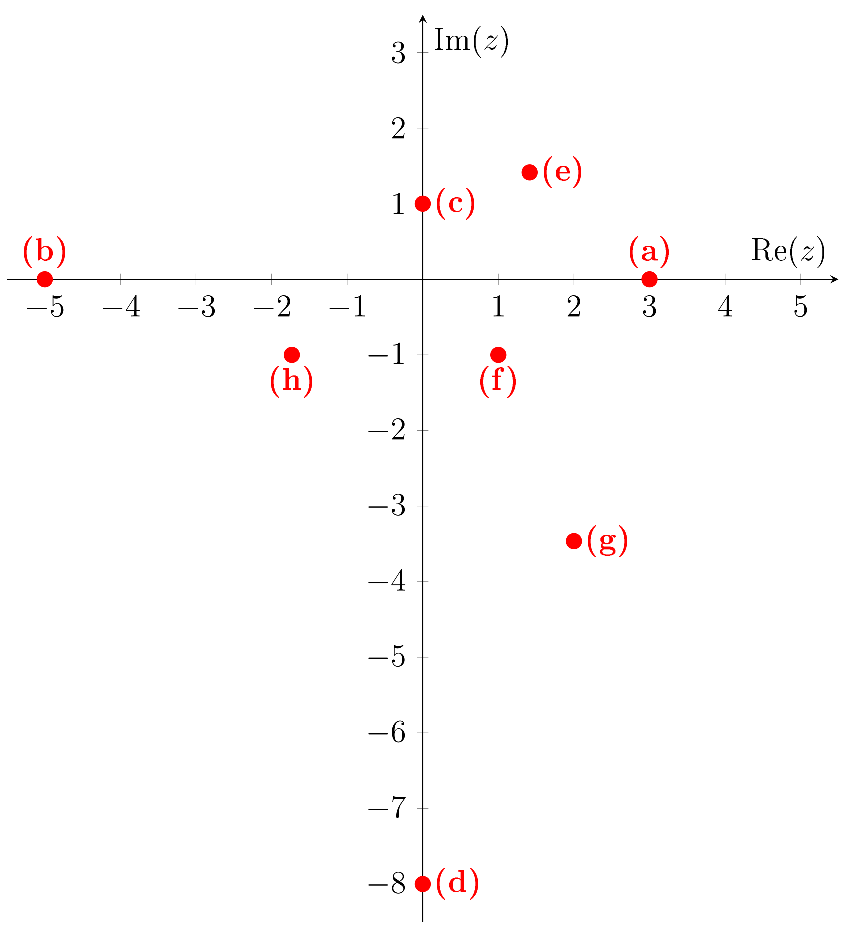
6.1. Feladat.
(a) $-i$; -1; **(b)** $41 - 11i$; **(c)** $17 - 2i$; **(d)** $-\frac{11}{17} + \frac{27}{17}i$; **(e)** $-\frac{3}{13} - \frac{11}{13}i$; **(f)** $\frac{11}{10} - \frac{23}{10}i$; **(g)** $-\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i$.

6.2. Feladat.

(a) $z = -\frac{13}{10} + \frac{11}{10}i$
(b) $z = 3 - i$
(c) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = \frac{3}{2}$
(d) $z_1 = 0$, $z_2 = -i$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

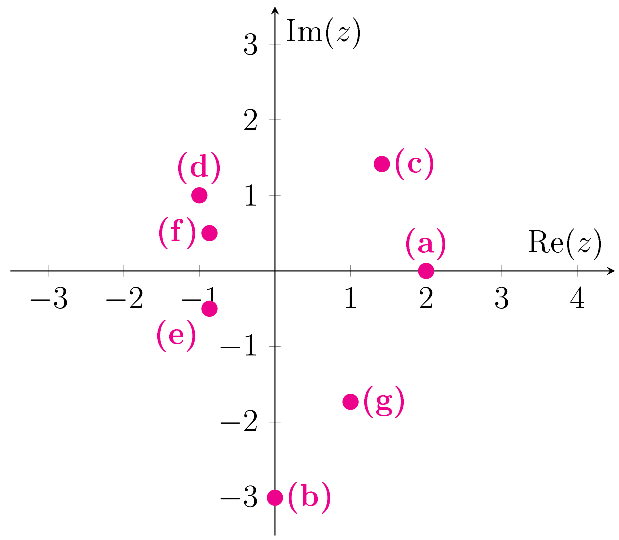
6.3. Feladat.

(a) $3 = 3 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 3e^0$;
(b) $-5 = 5 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = 5e^{\pi i}$;
(c) $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;
(d) $-8i = 8(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}) = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$;
(e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$;
(f) $1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$;
(g) $2 - 2\sqrt{3}i = 4(\cos \frac{5\pi}{3} - i \cdot \sin \frac{5\pi}{3}) = 4e^{\frac{5\pi}{3}i}$;
(h) $-\sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{7\pi}{6} - i \cdot \sin \frac{7\pi}{6}) = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$.



6.4. Feladat.

(a) $2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$;
(b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i} = -3i$;
(c) $2e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$;
(d) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}) = -1 + i$;
(e) $\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$;
(f) $e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;
(g) $2(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}i$.



6.5. Feladat.

(a) $8(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}) = 4\sqrt{3} + 4i$;
(b) $\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = -i$;
(c) $\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$;
(d) $\cos\pi + i \cdot \sin\pi = -1$;
(e) $2^{67}(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{6})$;
(f) $2^{611}(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2})$;
(g) $6^{1526}(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3})$.

6.6. Feladat.

(a) $2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$
$-2i = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2})$
(b) $-2 = 2(\cos\pi + i \sin\pi)$
$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})$
$1 - \sqrt{3}i = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))$
(c) $\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}$,
$\cos\frac{5\pi}{8} + i \sin\frac{5\pi}{8}$,
$\cos\frac{9\pi}{8} + i \sin\frac{9\pi}{8}$,
$\cos\frac{13\pi}{8} + i \sin\frac{13\pi}{8}$.
(d) $2 = 2\left(\cos 0 + i \sin 0\right)$,
$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$,
$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$,
$-2 = 2\left(\cos\pi + i \sin\pi\right)$,
$-1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)$,
$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right)$.
(e) $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$,
$-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right)$,
$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right)$.
(f) $\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$,
$\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$,
$\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)$,
$\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

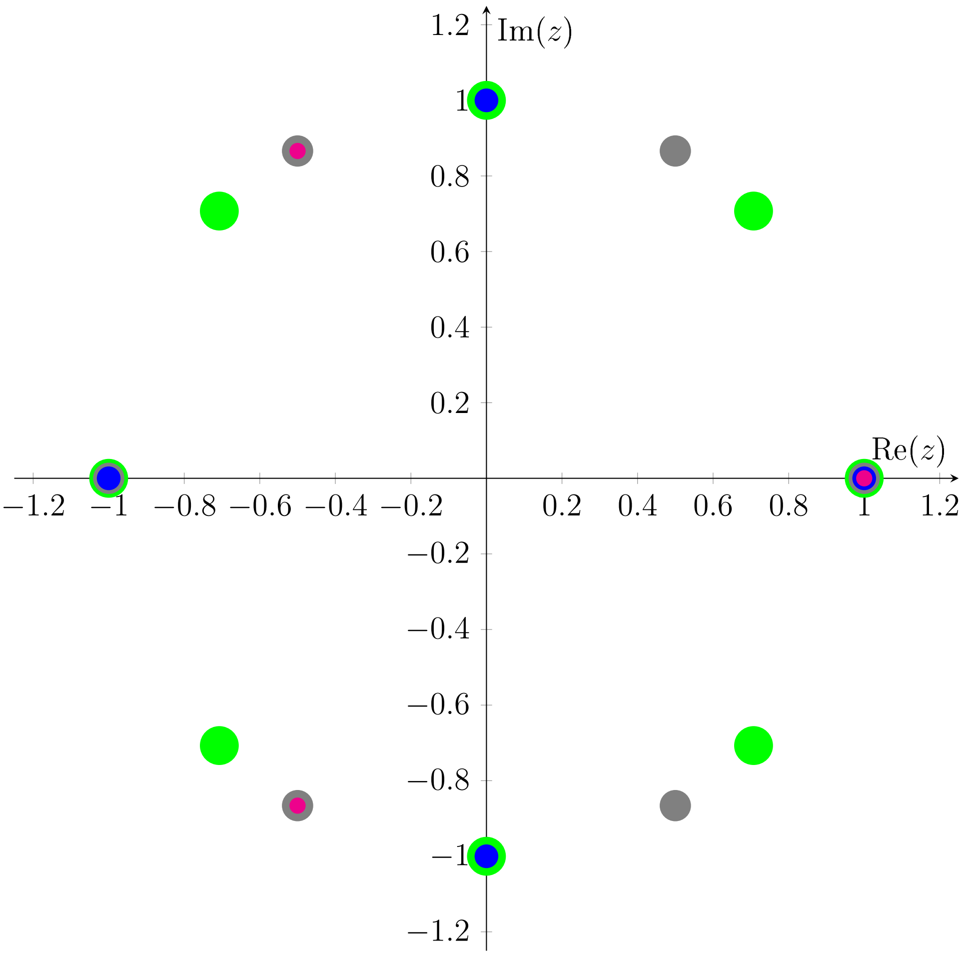
6.7. Feladat.

(a) Harmadik egységgyökök: 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Primitív harmadik egységgyökök: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(b) Negyedik egységgyökök: 1, i, -1, $-i$.
Primitív negyedik egységgyökök: i, $-i$.

(c) Hatodik egységgyökök: 1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Primitív hatodik egységgyökök: $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(d) Nyolcadik egységgyökök: 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, i, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.
Primitív nyolcadik egységgyökök: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.



6.8. Feladat.

(a) $x_1=-3-i$, $x_2=-3+i$
$x^2+6x+10=(x+3+i)(x+3-i)$

(b) $x_1=2i$, $x_2=-\sqrt{3}-i$, $x_3=\sqrt{3}-i$
$2x^3+16i=(x-2i)(x+\sqrt{3}+i)(x-\sqrt{3}+i)$

(c) $x_1=-2$, $x_2=1+\sqrt{3}i$, $x_3=1-\sqrt{3}i$
$x^3+8=(x+2)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

(d) $x_1=\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$x_2=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$,

$x_3=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$,

$x_4 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$
$x^4 + 1 + \sqrt{3}i = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

6.9. Feladat.

(a) x^2 **(b)** $-x^2 + 8x - 4$ **(c)** $-\frac{13}{15}x^3 + 3x^2 + \frac{28}{15}x$

7. feladatsor – Determinánsok, mátrixok

7.1. Feladat. **(a)** 14; **(b)** -70; **(c)** 10; **(d)** -21; **(e)** -7.

7.2. Feladat. $V = 14$.

7.3. Feladat. $x = 2$.

7.4. Feladat.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -8 \\ -8 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

7.5. Feladat.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}, \quad |AA^T| = 11; \qquad A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad |A^TA| = 0.$$

7.6. Feladat.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ha $n = 0$ és $\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$, ha $n > 0$, ahol F_n az n-edik Fibonacci-szám ($F_0 = 0, F_1 = 1$).

7.7. Feladat.

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} -17 & 16 & -9 \\ 6 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} -15 & 5 & 8 \\ 8 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.8. Feladat.

(a) Nem. **(b)** Nem. **(c)** Nem. **(d)** Igen.

8. feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek, mátrixegyenletek

8.1. Feladat.

(a) $\{(2, -3, -1)\}$
(b) Nincs megoldás.
(c) $\{(17 - 3x_2 + 3x_4, x_2, 4 + x_4, x_4) \colon x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$
(d) $\{(4 - u - v - w, 3 - v - w, -2 + u + 2v + w, u, v, w) \colon u, v, w \in \mathbb{R}\}$

8.2. Feladat. Ha $a = -3$, akkor végtelen sok megoldás van; ha $a = 3$, akkor nincs megoldás; minden más esetben pontosan 1 darab megoldás van.

8.3. Feladat. Oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket.

(a) Nincs megoldás.
(b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
(d) $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{7}{5} \\ \frac{23}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$
(e) $\begin{pmatrix} -5t_{21} - 2t_{11} & 5 - 5t_{22} - 2t_{12} & 3 - 5t_{23} - 2t_{13} \\ -1 - 3t_{21} - t_{11} & 3 - 3t_{22} - t_{12} & 2 - 3t_{23} - t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} \end{pmatrix}$, ahol $t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21}, t_{22}, t_{23} \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok

9. feladatsor – Vektorok

9.1. Feladat.

(a) $\underline{a} \cdot \underline{b} = 13$, $\underline{a} \times \underline{b} = (10, 5, 0)$;
(b) $\underline{a} \cdot \underline{b} = -15$, $\underline{a} \times \underline{b} = (22, 5, 1)$;

9.2. Feladat.

(a) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(b) Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.
(c) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(d) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(e) Lineárisan függő, generátorrendszer, nem bázis.
(f) Lineárisan független, generátorrendszer, bázis.
(g) Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

9.3. Feladat.

(a) Ha $x = -4$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(b) Ha $x = 7$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(c) Ha $x = -2$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(d) Bármely a esetén lineárisan független.

9.4. Feladat.

(a) 1-dimenziós, bázis: $\{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$.
(b) 2-dimenziós, bázis: $\{(-1, \frac{1}{2}, 0, 1), (0, -\frac{1}{2}1, 0)\}$.

9.5. Feladat.

(a) 1-dimenziós altér
(b) nem altér
(c) 0-dimenziós altér
(d) 3-dimenziós altér
(e) 2-dimenziós altér

9.6. Feladat.

(a) $\lambda_1 = -3$, bázis: $\{(2, 1)\}$; $\lambda_2 = 1$, bázis: $\{\frac{2}{3}, 1\}$
(b) $\lambda = -2$, bázis: $\{(-1, 1)\}$
(c) $\lambda_1 = -2$, bázis: $\{(-\frac{1}{3}, 1, 0)\}$; $\lambda_2 = 1$, bázis: $\{(1, 0, 0)\}$; $\lambda_3 = 3$, bázis: $\{(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 1)\}$
(d) $\lambda_1 = 2$, bázis: $\{(1, 0, 1)\}$; $\lambda_2 = -2$, bázis: $\{(0, 1, 1)\}$