Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. feladatsor – Ítéletkalkulus elemei

1.1. Feladat. Formalizáljuk az alábbi állításokat a megadott prímítéletek felhasználásával:
A : „Süt a nap." B : „Kimegyek az uszodába." C : „Hamburgert ebédelek."

(a) Kimegyek az uszodába, vagy hamburgert ebédelek.
(b) Kimegyek az uszodába, de nem ebédelek hamburgert.
(c) Nem süt a nap.
(d) Ha kimegyek az uszodába, hamburgert ebédelek.
(e) Pontosan akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

1.2. Feladat. Adjuk meg az alábbi formula összes részformuláját.

$$(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \to B)$$

1.3. Feladat. Döntsük el, hogy az

$$\begin{array}{llll} (a) & (A \leftrightarrow B) \vee \big((\neg B) \wedge C\big) & (b) & (A \leftrightarrow B) \vee \big((\neg B) \to C\big) \\ (c) & A \leftrightarrow \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big) & (d) & A \to \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big) \end{array}$$

formulák közül — a prímítéletek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgép, vagy ha nem bírja el a repülőgép, de indul hajó Afrikába.

1.4. Feladat. A prímítéletelek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket.

(a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok egy piros pontot, és örülhetek.*
(b) *Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.*
(c) *Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.*
(d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*
(e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*
(f) *Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld, vagy az asztal lekváros lesz.*
(g) *Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.*

(h) *Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.*

(i) *Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.*

(j) *Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.*

(k) *Ha még egy *** mondatot formalizálnom kell, akkor kitépem a hajamat, vagy megőrülök és utána tépem ki a hajamat.*

1.5. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a prímítéletek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A prímítéletek mindig pozitívak legyenek, azaz ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük $A, B, C, \ldots$ betűkkel.)

(a) *Ha nem fáj a lábam és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el sörözni, ha a haverom is velem jön.* $A : h,\ B : h,\ C : i,\ D : h.$

(b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára.*
$A : i,\ B : h,\ C : i,\ D : h,\ E : i.$

(c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.* $A : i,\ B : i,\ C : i,\ D : h,\ E : h.$

1.6. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket. Mit mondhatunk a (2) ítéletek igazságértékéről, ha igaznak fogadjuk el az (1) ítéleteket?

(a) (1) *Esik az eső, de nem fázom meg.*
(2) *Ha hideg van, vagy esik az eső, akkor megfázom.*

(b) (1) *Piroska szereti a Farkast, de ha Nagyi nem evett epret, akkor a Farkas megeszi a Nagyit.*
Ha a Farkas megeszi a Nagyit, akkor Piroska nem szereti a Farkast.
A Vadász lelőtte a Farkast.
(2) *Ha a Vadász lelőtte a Farkast, akkor a Nagyi pontosan akkor evett epret, ha nem igaz az, hogy Piroska szereti a Farkast vagy a Farkas megeszi a Nagyit.*

(c) (1) *Hófehérke pontosan akkor eszi meg a mérgezett almát, ha egyedül marad otthon.*
Ha Hófehérke megeszi a mérgezett almát, akkor nem főz ebédet és nem takarít.
Hófehérke egyedül marad otthon.
(2) *Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor pontosan abban az esetben főz ebédet, ha nem takarít.*
Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor megeszi a mérgezett almát, ha viszont nem marad egyedül otthon, akkor nem főz ebédet és nem takarít.

1.7. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy logikailag ekvivalensek-e.

(a) (1) *Ha nem tanulsz vagy puskázol, akkor megbuksz.*
(2) *Ha nem tanulsz, akkor megbuksz, valamint ha puskázol, akkor is megbuksz.*

(b) (1) *A Sárkányfűárus pontosan akkor tud árulni a piacon, ha sem Süsü, sem Királyfi nincs a városban.*
(2) *Süsü vagy Királyfi a városban van, vagy a Sárkányfűárus tud árulni a piacon, valamint ha Süsü vagy Királyfi nincs a városban, akkor a Sárkányfűárus nem tud árulni a piacon.*

(c) (1) *Kriszta csak akkor nem bukik meg, ha Mézga Géza pontosan akkor lesz dühös, ha Aladár szivarozni kezd.*
(2) *Kriszta megbukik vagy Aladár nem kezd el szivarozni vagy Mézga Géza dühös lesz, valamint ha Kriszta nem bukik meg és Aladár sem kezd el szivarozni, akkor Mézga Géza nem lesz dühös.*

1.8. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

(a) $(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$;
(b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$;
(c) $(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv (A \vee B) \to C$;
(d) $(A \to B) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge C)) \equiv A \to (A \vee B)$;
(e) $(A \to B) \to ((A \vee C) \to (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \to A$;
(f) $((A \wedge B) \to A) \wedge (A \to (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A))$.

1.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia, és melyik nem:

(a) $\big(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \to (\neg A))\big)$;
(b) $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$;
(c) $A \to (A \wedge B)$;
(d) $A \vee \big(B \to (\neg A)\big)$;
(e) $(A \vee B) \to ((A \vee (\neg B)) \to A)$;
(f) $\big(B \vee (\neg A)\big) \to \big(B \vee (\neg A)\big)$;
(g) $\big(((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C\big) \leftrightarrow \big((A \leftrightarrow C) \wedge A\big)$.

1.10. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy kielégíthetőek-e a következő formula- és ítélethalmazok.

(a) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
(b) $(A \vee B) \to (C \wedge D),\ (D \vee E) \to G,\ A \vee (\neg G)$
(c) A szerződést akkor és csak akkor teljesítik, ha a házat februárban befejezik. Ha a házat februárban befejezik, akkor március 1-én beköltözhetünk. Ha március 1-jén nem költözünk be, akkor márciusra lakbért kell fizetnünk. Ha a szerződést nem teljesítik, akkor márciusra lakbért kell fizetnünk. Nem kell márciusra lakbért fizetnünk.

1.11. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma:

$F_1 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (\neg B))$,
$F_2 = (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C)$,
$F_3 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C))$,
$F_4 = (\neg A) \wedge B \wedge C$.

1.12. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját:

(a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C)$;
(b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C$;
(c) $(A \vee B) \to \big(\neg(C \to B)\big)$;
(d) $(A \vee (\neg B)) \to (C \leftrightarrow B)$;
(e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \to (\neg B)) \vee (A \wedge B))$;
(f) $(\neg(A \to B)) \wedge \big(((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B\big)$.

2. feladatsor – Predikátumkalkulus elemei

2.1. Feladat. Jelölje $M(x)$ az „*x négyzetszám*", $P(x)$ az „*x páros szám*", $O(x, y)$ az „*x osztója y-nak*", $N(x)$ az „*x negatív szám*" predikátumokat, individuumtartomány az egész számok halmaza. Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

(a) $P(7)$
(b) $M(4) \wedge \neg N(9+3)$
(c) $(\forall x)(O(2, 4 \cdot x))$
(d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x, 6))$
(e) $(\forall x)(O(4, x) \to P(x))$
(f) $(\forall x)\Big(M(x) \to (\exists y)\big(P(y) \wedge O(x, y)\big)\Big)$
(g) $(\exists x)\bigg(P(x) \wedge (\forall y)\Big(\big(P(y) \wedge N(y)\big) \to \big(\neg O(y, x)\big)\Big)\bigg)$

2.2. Feladat. Legyen Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans. Adjuk meg a következő formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

$$(\forall x)P\big(f(x, a), x\big) \to (\exists y)\Big(P\big(f(y, x), y\big) \wedge Q(x)\Big).$$

2.3. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „*x hallgató*",	$V(x)$: „*x felkészült a vizsgára*",
$B(x, y)$: „*x az y barátja*",	$C(x, y)$: „*x csoporttársa y-nak*",
$T(x, y)$: „*x házatársa y-nak*",	$F(x)$: „*x férfi*",
$A(x)$: „*x anya*",	p: „*Péter*",
$a(x)$: „*x anyja*",	$S(x)$: „*x szeret főzni*".

(a) *Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.*
(b) *Minden hallgató felkészült a vizsgára.*
(c) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
(d) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.*
(e) *Vannak nőtlen férfiak.*
(f) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
(g) *Péter összes barátja hallgató.*
(h) *Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.*
(i) *Péter anyja szeret főzni.*

2.4. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

(a) *Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.*
(b) *Minden egész számnál létezik kisebb.*
(c) *Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.*

(d) *Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.*
(e) *Minden szám pozitív vagy negatív.*

2.5. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

(a) *Minden informatikus éhes.*
(b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
(c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*
(d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
(e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
(f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
(g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*

2.6. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e az alábbi formulák az $(A; N, K, P)$ interpretációnál, ahol $A = \mathbb{Z}$, N a négyzetszámok, K a köbszámok, P pedig a prímszámok halmaza.

(a) $\big((\exists x)N(x) \wedge (\exists x)K(x)\big) \to (\exists x)(N(x) \wedge K(x))$
(b) $(\exists x)(N(x) \vee P(x)) \to \big((\exists x)N(x) \vee (\exists x)P(x)\big)$

2.7. Feladat. Döntsük el, hogy tautológiák-e a következő formulák.

(a) $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \to (\forall x)A(x,x)$
(b) $\big((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)\big) \to (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$
(c) $\big((\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)\big) \to (\exists x)(A(x) \vee B(x))$
(d) $\neg(\exists x)(\forall y)\big((\neg A(x)) \vee (\neg B(y))\big) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$

3. feladatsor – Halmazok

3.1. Feladat. Legyen $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik hamis.

(a) $\emptyset \in A$	**(c)** $\{\emptyset\} \in A$	**(e)** $\{\{\emptyset\}\} \in A$	**(g)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$
(b) $\emptyset \subseteq A$	**(d)** $\{\emptyset\} \subseteq A$	**(f)** $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$	**(h)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

3.2. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$ és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e\}$ és $C = \{a, b, e\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{B}, \quad A \setminus B, \quad A \triangle B, \quad (A \triangle \overline{C}) \setminus \overline{B}, \quad \mathcal{P}(B).$$

3.3. Feladat. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B.$$

3.4. Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

3.5. Feladat. Döntsük el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$	**(d)** $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$	**(e)** $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$	**(f)** $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$

3.6. Feladat. Adjunk meg az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmazon egy olyan osztályozást, melynek

(a) legalább 3 osztálya van;
(b) pontosan 3 osztálya van;
(c) két osztálya van és mindegyik legalább kételemű;
(d) három osztálya van és mindegyik legalább háromelemű.

3.7. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.

(a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$	**(e)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$	**(f)** $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$
(c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$	**(g)** $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	

3.8. Feladat. Adjuk meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az A, B, C, D halmazok és komplementereik segítségével.

3.9. Feladat. Van-e olyan A, B, C halmaz, melyre $A \subseteq B \in C$ és $A \in B \subseteq C$ is teljesül?

3.10. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$.

(a) $A \subseteq B$ **(b)** $A = B$ **(c)** $B \setminus A = \emptyset$

3.11. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra teljesül, hogy

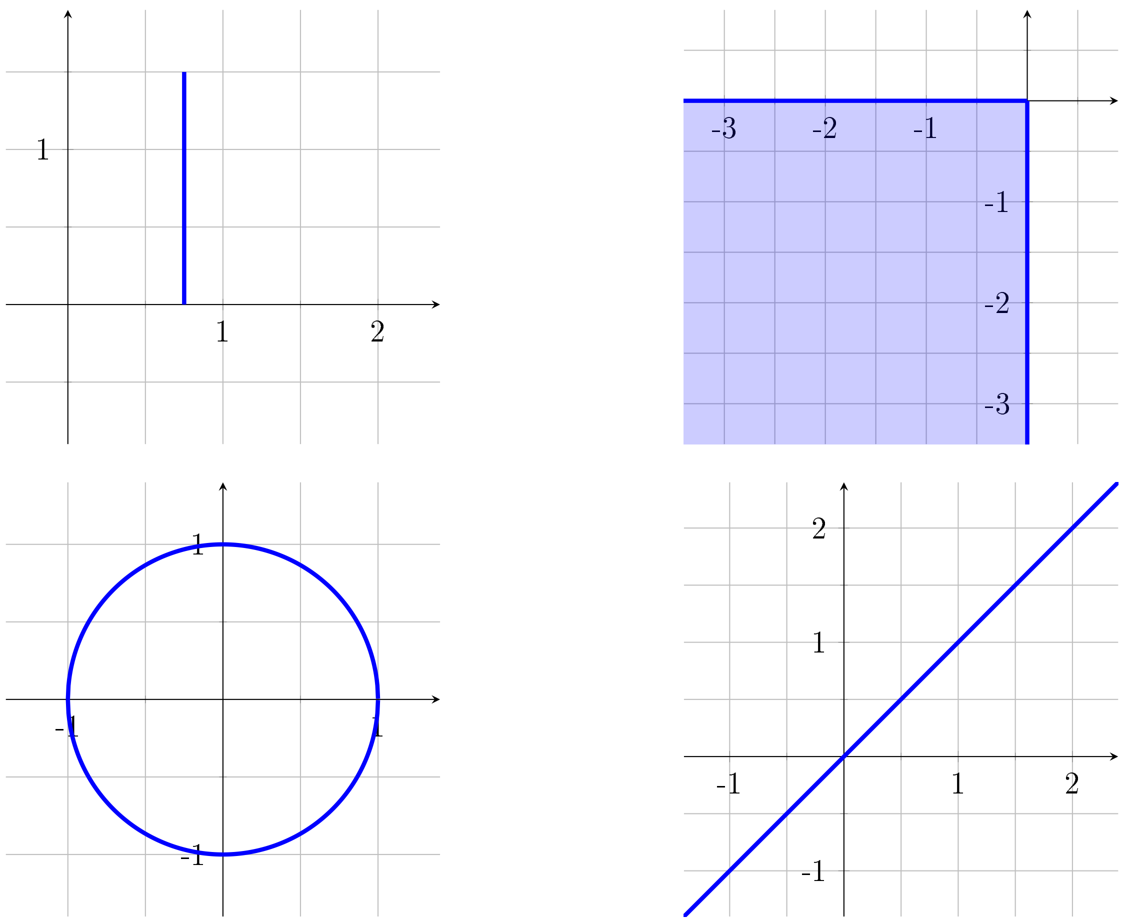
(a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$;
(b) $(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \supseteq (A \cap C \cap D)$.

3.12. Feladat. Vezessünk be egy új műveletet a halmazok körében: legyen A és B az U univerzum részhalmaza, és legyen $A \sqcap B := \overline{A \cap B}$. Igazoljuk, hogy $\overline{A} = A \sqcap A$ és $A \cap B = (A \sqcap B) \sqcap (A \sqcap B)$. Hogyan fejezhető ki az egyesítés a $\sqcap$ művelet segítségével?

3.13. Feladat. Határozzuk meg az alábbi A és B halmazok esetén $A \times B$-t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

(a) $A = \{1, 3\},\ B = \{-1, 0, 2\}$
(b) $A = \{1, 3\},\ B = [1; 3)$
(c) $A = (-1; 2],\ B = [1; 3)$

3.14. Feladat. Előállnak-e a következő (kék) ponthalmazok a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként?



4. feladatsor – Relációk

4.1. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk, melyre

$$\alpha = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\} \text{ és } \beta = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

$$\alpha^{-1}, \qquad \alpha\beta, \qquad \beta\alpha, \qquad \beta\alpha^{-1}, \qquad \beta \cap \alpha^{-1}.$$

4.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi α és β relációk esetén az α^{-1}, $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ relációkat. (Az $\mathbb{E}$ az emberek halmazát jelöli.)

(a) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon y \text{ az } x \text{ apja}\}$
(b) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2y\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2^y\}$
(c) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y - 1 = 3x\}$

4.3. Feladat. Adjuk meg a $H = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon értelmezett $\rho = \{(a, b) \colon a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$ reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

4.4. Feladat. Adjunk meg a gráfjával az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon egy olyan relációt, amely

(a) reflexív, tranzitív de nem szimmetrikus;
(b) antiszimmetrikus, tranzitív de nem dichotom;
(c) dichotom de nem reflexív.

4.5. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy teljes rendezés.

(a) $\{(a, b) \colon |a - b| \leq 2\}$ a $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon
(b) $\{(x, y) \colon x \leq y\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
(c) $\{(x, y) \colon x < y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
(d) $\{(a, b) \colon ab \geq 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
(e) $\{(a, b) \colon a^2 \geq b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
(f) $\{(x, y) \colon |x| = |y|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
(g) $\{(x, y) \colon 2 \mid x + y\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon
(h) $\{(a, b) \colon 4 \mid b - a\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
(i) $\{(a, b) \colon a^2 < b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
(j) $\{(X, Y) \colon X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ halmazon

4.6. Feladat. Adjon meg olyan osztályozást az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt.

4.7. Feladat. Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

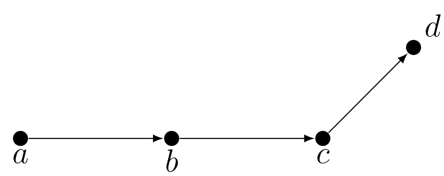
(a) $\{(a, b) \colon ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazon
(b) $\{(a, b) \colon 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon

(c) $\{(H,G)\colon |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1,2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a,b\}, \{1,2,3\}\}$ halmazon
(d) $\{(x,y)\colon x$-nek és y-nak van közös prímosztója$\}$ az $A = \{2,3,8,9,14,15,19,26\}$ halmazon
(e) $\{(x,y)\colon x$ és y számjegyeinek összege egyenlő$\}$ az $A = \{71,301,216,4,121,54,602,315\}$ halmazon
(f) $\{(a,b)\colon |a| = |b|\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
(g) $\{(x,y)\colon x^2 + y^2$ páros$\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

4.8. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb és legnagyobb elemek?

(a) $(A;\subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\}$
(b) $(B;\subseteq)$, ahol $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
(c) $(C;|)$, ahol $C = \{2,3,4,5,6,12,24,36\}$
(d) $(D;|)$, ahol $D = \{0,1,2,4,7,14,28,32\}$
(e) $(E;\sqsubseteq)$, ahol $E = \{123,211,321,467,512,861,999\}$ és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye
(f) $(F;\leq)$, ahol $F = \{(1,1), (\frac{1}{2},2), (0,-1), (\frac{1}{3},3), (2,2)\}$ és $\leq$ a komponensenkénti részbenrendezés

4.9. Feladat. Adjuk meg a következő gráf által meghatározott ρ reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, reflexív és tranzitív lezártját.



4.10. Feladat. Legyen $\rho = \{(a,b) \mid a - b = 2\}$ reláció az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmazon. Rajzoljuk fel a ρ gráfját és adjuk meg (ne csak a gráfjával)

(a) ρ reflexív lezártját;
(b) ρ szimmetrikus lezártját;
(c) ρ tranzitív lezártját;
(d) ρ reflexív és tranzitív lezártját.

4.11. Feladat. Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

(a) $\{(a,b) \in A^2\colon |a-b| = 2\}$, ahol $A = \{1,2,3,4,5\}$;
(b) $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2\colon a - b = 0\}$;
(c) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\colon b = a^2\}$;
(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y - x = 1\}$.

5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyik leképezés?

(a) $\alpha = \{(x, y) \colon y = |x|\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(b) $\beta = \{(x, y) \colon x = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(c) $\gamma = \{(x, y) \colon x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

5.2. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

(a) $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2, \quad \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3x + 1$
(b) $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 2^x - 1, \quad \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3^{x-1}$
(c) $\alpha \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2,\ x \mapsto (x, x - 1)$

5.3. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát és $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát.)

(a) $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2$
(b) $\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ x\beta = x^2$
(c) $\gamma = \{(x, y) \colon x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$
(d) $\delta = \{(x, y) \colon \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$
(e) $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x\varepsilon = \frac{4}{x}$
(f) $\zeta \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x\zeta = |n - 3| + 1$
(g) $\eta \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma
(h) $\theta \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$
(i) $\iota \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x - 1, 1)$
(j) $\kappa \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x - 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

5.4. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

(a) nem szürjektív,
(b) szürjektív, de nem bijektív,
(c) injektív, de nem bijektív,
(d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat.

5.5. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

(a) $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 3x - 1$
(b) $\beta \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\beta = (x + 2)^2 - 4$

5.6. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között.

(a) $(1,6)$ és $(4,7)$ **(b)** $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$ **(c)** $(0,1)$ és $\mathbb{R}$

5.7. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \to B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

(a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$
(b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$
(c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$
(d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$
(e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$
(f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$
(g) $A = \mathbb{N}^3$, $B = \mathbb{Z}$
(h) $A = \mathbb{Q}^4$, $B = \mathbb{N}^2$
(i) $A = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{Z}^8$

5.8. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
(b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
(c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

6. feladatsor – Komplex számok, polinomok

6.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva határozzuk meg az alábbi műveletek végeredményét:
(a) i^{2011}; i^{-22}; **(b)** $(3+5i)(2-7i)$; **(c)** $(\overline{-6+9i}+4-8i)\cdot i$; **(d)** $\dfrac{-7-i}{1+4i}$; **(e)** $\overline{\dfrac{1+3i}{3+2i}}$;
(f) $\dfrac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}$; **(g)** $\dfrac{\operatorname{Re}(3+5i)-(4-2i)}{(3-2i)+\operatorname{Im}(6+i)}$.

6.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $(1-3i)z = 2+5i$;
(b) $(3+4i)z+(1+2i) = 14+11i$;
(c) $z^2+4\overline{z} = |z|^2+6$;
(d) $i\overline{z} = z^2$.

6.3. Feladat. Az alábbi kanonikus alakban adott komplex számokat írjuk át trigonometrikus és exponenciális alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon:

(a) 3; **(c)** i; **(e)** $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; **(g)** $2-2\sqrt{3}i$;
(b) -5; **(d)** $-8i$; **(f)** $1-i$; **(h)** $-\sqrt{3}-i$.

6.4. Feladat. Az alábbi trigonometrikus vagy exponenciális alakban megadott komplex számokat írjuk át kanonikus alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon:

(a) $2(\cos 0 + i\sin 0)$; **(c)** $2e^{\frac{\pi}{4}i}$; **(e)** $\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$;
(b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$; **(d)** $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$; **(f)** $e^{\frac{5\pi}{6}i}$;
(g) $2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$.

6.5. Feladat. Trigonometrikus alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét:

(a) $(\sqrt{3}-i)(2+2\sqrt{3}i)$;
(b) $\dfrac{1-i}{1+i}$;
(c) $\dfrac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)}$;
(d) i^{14};
(e) $(\sqrt{3}-i)^{67}$;
(f) $(1+i)^{1222}$;
(g) $(-3-3\sqrt{3}i)^{1526}$.

6.6. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

(a) $\sqrt{-4}$; **(c)** $\sqrt[4]{i}$; **(e)** $\sqrt[3]{-8i}$;
(b) $\sqrt[3]{-8}$; **(d)** $\sqrt[6]{64}$; **(f)** $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$.

6.7. Feladat. Számoljuk ki és ábrázoljuk Gauss-féle számsíkon a

(a) harmadik **(b)** negyedik **(c)** hatodik **(d)** nyolcadik

egységgyököket, és állapítsuk meg, melyek közülük rendre a primitív harmadik, negyedik, hatodik, nyolcadik egységgyökök.

6.8. Feladat. Határozzuk meg a következő polinomok gyökeit. Adjuk meg a gyöktényezős felbontásukat is.

(a) $x^2 + 6x + 10$

(b) $2x^3 + 16i$

(c) $x^3 + 8$

(d) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$

6.9. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

(a) $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(3, 9)$;

(b) $A(1, 3)$, $B(2, 8)$, $C(4, 12)$;

(c) $A(-1, 2)$, $B(0, 0)$, $C(1, 4)$, $D(4, 0)$.

7. feladatsor – Determinánsok, mátrixok

7.1. Feladat. Határozzuk meg a következő determinánsokat:

$$\textbf{(a)} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(d)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(e)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.2. Feladat. Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

7.3. Feladat. Adjuk meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$$

7.4. Feladat. Számítsuk ki a következő mátrixokat: $A + B, 3A, B^T, BC, CA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

7.5. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ és $A^T \cdot A$ szorzatmátrixok determinánsát.

7.6. Feladat. Határozza meg a következő mátrixhatványokat (n nemnegatív egész szám).

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1111} \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n}$$

7.7. Feladat. Adjuk meg a következő mátrixok inverzét:

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

7.8. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B $n \times n$-es mátrixok esetén?

(a) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

(b) $(AB)^T = A^T B^T$

(c) $A^n A^m = A^{nm}$

(d) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

8. feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek, mátrixegyenletek

8.1. Feladat. Oldjuk meg Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 &= 6 \\ -3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} a - b + u &= 1 \\ a + c - v &= 2 \\ b + v + w &= 3 \end{aligned}$$

8.2. Feladat. Határozzuk meg, hogy az alábbi egyenletrendszernek hány megoldása van az a valós paraméter függvényében.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2 - 8)x_3 &= a + 4 \end{aligned}$$

8.3. Feladat. Oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

9. feladatsor – Vektorok

9.1. Feladat. Határozzuk meg a következő $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok belső (skaláris) szorzatát, illetve vektoriális szorzatát.

(a) $\underline{a} = (1, -2, 3)$, $\underline{b} = (2, -4, 1)$;
(b) $\underline{a} = (-1, 4, 2)$, $\underline{b} = (1, -5, 3)$;

9.2. Feladat. Döntsük el, hogy a következő vektorrendszerek lineáris függetlenek-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $\underline{a} = (-2, 4)$, $\underline{b} = (1, -2)$;
(b) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$;
(c) $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (4, 1, 0)$, $\underline{c} = (0, 0, 0)$;
(d) $\underline{a} = (1, -2, 4)$, $\underline{b} = (2, -3, 1)$, $\underline{c} = (-4, 5, 5)$;
(e) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$, $\underline{c} = (4, 3, -2)$, $\underline{d} = (-1, 4, -3)$;
(f) $\underline{a} = (1, 2, -1)$, $\underline{b} = (3, 1, 4)$, $\underline{c} = (2, 3, -1)$;
(g) $\underline{a} = (1, -2, 3, 4)$, $\underline{b} = (0, -3, 1, 2)$, $\underline{c} = (2, -4, 5, 9)$.

9.3. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?

(a) $\underline{a} = (2, 3)$, $\underline{b} = (x, -6)$;
(b) $\underline{a} = (1, -4, 3, 2)$, $\underline{b} = (-1, 4, -2, -4)$, $\underline{c} = (3, -12, x, 10)$;
(c) $\underline{a} = (-1, -3, 2, 1, -1)$, $\underline{b} = (-2, -8, 7, 3, -1)$, $\underline{c} = (1, 9, -11, -4, x)$;
(d) $\underline{a} = (1, -1, 2)$, $\underline{b} = (2, -1, -1)$, $\underline{c} = (1, 0, a^2)$, $\underline{d} = (2, -1, a + 4)$.

9.4. Feladat. Határozzuk meg hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldástere, valamint adjuk meg a megoldástér egy bázisát.

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

9.5. Feladat. Döntsük el, hogy a következő halmazok alteret alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$-ben. Ha igen, akkor adjuk meg az altér dimenzióját.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - 2y = z, y + z = x\}$;
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y + 3z = 2\}$;
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$;
(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

9.6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit, majd adjunk meg bázist a sajátértékekhez tartozó sajátalterekhez.

(a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$