9. feladatsor – Vektorok

9.1. Feladat. Határozzuk meg a következő $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok belső (skaláris) szorzatát, illetve vektoriális szorzatát.

(a) $\underline{a} = (1, -2, 3)$, $\underline{b} = (2, -4, 1)$;
(b) $\underline{a} = (-1, 4, 2)$, $\underline{b} = (1, -5, 3)$;

9.2. Feladat. Döntsük el, hogy a következő vektorrendszerek lineáris függetlenek-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $\underline{a} = (-2, 4)$, $\underline{b} = (1, -2)$;
(b) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$;
(c) $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (4, 1, 0)$, $\underline{c} = (0, 0, 0)$;
(d) $\underline{a} = (1, -2, 4)$, $\underline{b} = (2, -3, 1)$, $\underline{c} = (-4, 5, 5)$;
(e) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$, $\underline{c} = (4, 3, -2)$, $\underline{d} = (-1, 4, -3)$;
(f) $\underline{a} = (1, 2, -1)$, $\underline{b} = (3, 1, 4)$, $\underline{c} = (2, 3, -1)$;
(g) $\underline{a} = (1, -2, 3, 4)$, $\underline{b} = (0, -3, 1, 2)$, $\underline{c} = (2, -4, 5, 9)$.

9.3. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?

(a) $\underline{a} = (2, 3)$, $\underline{b} = (x, -6)$;
(b) $\underline{a} = (1, -4, 3, 2)$, $\underline{b} = (-1, 4, -2, -4)$, $\underline{c} = (3, -12, x, 10)$;
(c) $\underline{a} = (-1, -3, 2, 1, -1)$, $\underline{b} = (-2, -8, 7, 3, -1)$, $\underline{c} = (1, 9, -11, -4, x)$;
(d) $\underline{a} = (1, -1, 2)$, $\underline{b} = (2, -1, -1)$, $\underline{c} = (1, 0, a^2)$, $\underline{d} = (2, -1, a + 4)$.

9.4. Feladat. Határozzuk meg hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldástere, valamint adjuk meg a megoldástér egy bázisát.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

9.5. Feladat. Döntsük el, hogy a következő halmazok alteret alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$-ben. Ha igen, akkor adjuk meg az altér dimenzióját.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - 2y = z, y + z = x\}$;
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y + 3z = 2\}$;
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$;
(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

9.6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit, majd adjunk meg bázist a sajátértékekhez tartozó sajátalterekhez.

(a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$