7. feladatsor – Determinánsok, mátrixok

7.1. Feladat. Határozzuk meg a következő determinánsokat:

$$\textbf{(a)} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(d)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(e)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.2. Feladat. Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

7.3. Feladat. Adjuk meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$$

7.4. Feladat. Számítsuk ki a következő mátrixokat: $A + B, 3A, B^T, BC, CA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

7.5. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ és $A^T \cdot A$ szorzatmátrixok determinánsát.

7.6. Feladat. Határozza meg a következő mátrixhatványokat (n nemnegatív egész szám).

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1111} \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n}$$

7.7. Feladat. Adjuk meg a következő mátrixok inverzét:

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

7.8. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B $n \times n$-es mátrixok esetén?

(a) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

(b) $(AB)^T = A^T B^T$

(c) $A^n A^m = A^{nm}$

(d) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$