

6. feladatsor – Komplex számok, polinomok

6.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva határozzuk meg az alábbi műveletek végeredményét:

(a) i^{2011} ; i^{-22} ; (b) $(3 + 5i)(2 - 7i)$; (c) $(\overline{-6 + 9i} + 4 - 8i) \cdot i$; (d) $\frac{-7 - i}{1 + 4i}$; (e) $\frac{1 + 3i}{3 + 2i}$;
(f) $\frac{(-2 + 3i)(8 + i)}{(-4 - 7i)(1 - i)}$; (g) $\frac{\operatorname{Re}(3 + 5i) - (4 - 2i)}{(3 - 2i) + \operatorname{Im}(6 + i)}$.

6.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $(1 - 3i)z = 2 + 5i$;
(b) $(3 + 4i)z + (1 + 2i) = 14 + 11i$;
(c) $z^2 + 4\bar{z} = |z|^2 + 6$;
(d) $i\bar{z} = z^2$.

6.3. Feladat. Az alábbi kanonikus alakban adott komplex számokat írjuk át trigonometrikus és exponenciális alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon:

(a) 3; (c) i ; (e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; (g) $2 - 2\sqrt{3}i$;
(b) -5 ; (d) $-8i$; (f) $1 - i$; (h) $-\sqrt{3} - i$.

6.4. Feladat. Az alábbi trigonometrikus vagy exponenciális alakban megadott komplex számokat írjuk át kanonikus alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon:

(a) $2(\cos 0 + i \sin 0)$; (c) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$; (e) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$;
(b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$; (d) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$; (f) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$;
(g) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$.

6.5. Feladat. Trigonometrikus alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét:

(a) $(\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i)$; (d) i^{14} ;
(b) $\frac{1 - i}{1 + i}$; (e) $(\sqrt{3} - i)^{67}$;
(c) $\frac{(-1 - i)(\sqrt{3} + i)}{(-1 + i)(-\sqrt{3} + i)}$; (f) $(1 + i)^{1222}$;
(g) $(-3 - 3\sqrt{3}i)^{1526}$.

6.6. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

(a) $\sqrt{-4}$; (c) $\sqrt[4]{i}$; (e) $\sqrt[3]{-8i}$;
(b) $\sqrt[3]{-8}$; (d) $\sqrt[6]{64}$; (f) $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$.

6.7. Feladat. Számoljuk ki és ábrázoljuk Gauss-féle számsíkon a

(a) harmadik (b) negyedik (c) hatodik (d) nyolcadik

egységgyököket, és állapítsuk meg, melyek közülük rendre a primitív harmadik, negyedik, hatodik, nyolcadik egységgyökök.

6.8. Feladat. Határozzuk meg a következő polinomok gyökeit. Adjuk meg a gyöktényezőző felbontásukat is.

(a) $x^2 + 6x + 10$
(b) $2x^3 + 16i$

(c) $x^3 + 8$
(d) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$

6.9. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

- (a) $A(-1, 1), B(2, 4), C(3, 9)$;
(b) $A(1, 3), B(2, 8), C(4, 12)$;
(c) $A(-1, 2), B(0, 0), C(1, 4), D(4, 0)$.