

5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat megoldása.

- (a) ÉT: $x \in \mathbb{R}$, ÉK: $y \geq 0$, leképezés.
- (b) ÉT: $x \geq 0$, ÉK: $y \in \mathbb{R}$, nem leképezés.
- (c) ÉT: $x > 0$, ÉK: $y \in \mathbb{R}$, leképezés.

5.2. Feladat megoldása.

- (a) $\alpha\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 1$
- (b) $\alpha\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3^{2^x - 2}$
- (c) $\alpha\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} - 1\right)$

5.3. Feladat megoldása.

- (a) Nem injektív, nem szürjektív.
- (b) Nem injektív, szürjektív.
- (c) Nem injektív, nem szürjektív.
- (d) Nem injektív, nem szürjektív.
- (e) Injektív, nem szürjektív.
- (f) Nem injektív, szürjektív.
- (g) Nem injektív, szürjektív.
- (h) Nem injektív, szürjektív.
- (i) Injektív, nem szürjektív.
- (j) Nem injektív, szürjektív.

5.4. Feladat megoldása.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = x^2$
- (c) $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x\gamma = x^2$
- (d) $\delta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\delta = x^2$

Az α leképezés nem szürjektív, mert a -9 nem áll elő egyetlen valós szám négyzeteként sem.

A β leképezés szürjektív, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y} \mapsto y$. Viszont nem bijektív, mert $(-4)\beta = 4\beta$.

A γ leképezés injektív, mert különböző pozitív valós számoknak a négyzete is különböző. Viszont nem szürjektív, mert a -9 nem áll elő egyetlen pozitív valós szám négyzeteként sem.

A δ leképezés bijektív. Injektív: tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ és $a^2 = b^2$. Ekkor $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$, sőt $a = b$, mivel a leképezés indulási halmaza most \mathbb{R} . Szürjektív: tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ szám esetén $\sqrt{y} \mapsto y$.

5.5. Feladat megoldása.

- (a) Tegyük fel, hogy $x\alpha = y\alpha$. Ekkor

$$\begin{aligned}x\alpha &= y\alpha \\3x - 1 &= 3y - 1 \\3x &= 3y \\x &= y.\end{aligned}$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén $\frac{y+1}{3} \in \mathbb{R}$ és $\frac{y+1}{3} \mapsto y$.
Tehát a leképezésnek létezik inverze:

$$\alpha^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{3}.$$

(b) Tegyük fel, hogy $x\beta = y\beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} x\beta &= y\beta \\ (x+2)^2 - 4 &= (y+2)^2 - 4 \\ (x+2)^2 &= (y+2)^2 \\ |x+2| &= |y+2| \\ x+2 &= y+2 \\ x &= y. \end{aligned}$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y+4} - 2 \in \mathbb{R}^+$ és $\sqrt{y+4} - 2 \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze:

$$\beta^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{x+4} - 2.$$

5.6. Feladat megoldása.

- (a) $\alpha: (1, 6) \rightarrow (4, 7), x\alpha = \frac{3}{5}x + \frac{17}{5}$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 2^x$
- (c) $\gamma: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x\gamma = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$

5.7. Feladat megoldása.

- | | |
|----------|----------|
| (a) Igen | (f) Nem |
| (b) Igen | (g) Igen |
| (c) Nem | (h) Igen |
| (d) Igen | (i) Nem |
| (e) Nem | |

5.8. Feladat megoldása.

- (a) Mindenkit átküld az 1-gyel nagyobb számú szobába, és az új vendéget berakja az 1-es szobába, mert az üres lett.
- (b) Mindenkit át kell küldeni a 999999-cel nagyobb szobába, így az első 999999 számú szobák üresen maradnak. Oda elfér a 999999 új vendég.
- (c) Mindenki menjen át a kétszer akkora számú szobába, mint amiben most van. Ekkor a páratlan számú szobák üresen maradnak, tehát megszámlálhatóan végtelen sok szoba üres marad, oda mehetnek az új vendégek.