5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyik leképezés?

- **(a)** $\alpha = \{(x, y) \colon y = |x|\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- **(b)** $\beta = \{(x, y) \colon x = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- **(c)** $\gamma = \{(x, y) \colon x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

5.2. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

- **(a)** $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2, \quad \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3x + 1$
- **(b)** $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 2^x - 1, \quad \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3^{x-1}$
- **(c)** $\alpha \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2,\ x \mapsto (x, x - 1)$

5.3. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát és $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát.)

- **(a)** $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2$
- **(b)** $\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ x\beta = x^2$
- **(c)** $\gamma = \{(x, y) \colon x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$
- **(d)** $\delta = \{(x, y) \colon \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$
- **(e)** $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x\varepsilon = \frac{4}{x}$
- **(f)** $\zeta \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x\zeta = |n - 3| + 1$
- **(g)** $\eta \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma
- **(h)** $\theta \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$
- **(i)** $\iota \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x - 1, 1)$
- **(j)** $\kappa \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x - 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

5.4. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

- **(a)** nem szürjektív,
- **(b)** szürjektív, de nem bijektív,
- **(c)** injektív, de nem bijektív,
- **(d)** bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat.

5.5. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

- **(a)** $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 3x - 1$
- **(b)** $\beta \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\beta = (x + 2)^2 - 4$

5.6. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között.

(a) $(1,6)$ és $(4,7)$ **(b)** $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$ **(c)** $(0,1)$ és $\mathbb{R}$

5.7. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \to B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

(a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$
(b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$
(c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$
(d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$
(e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$
(f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$
(g) $A = \mathbb{N}^3$, $B = \mathbb{Z}$
(h) $A = \mathbb{Q}^4$, $B = \mathbb{N}^2$
(i) $A = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{Z}^8$

5.8. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
(b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
(c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?