

### 3. feladatsor – Halmazok

**3.1. Feladat.** Legyen  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik hamis.

- |                             |                                 |                                     |  |
|-----------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) $\emptyset \in A$       | (c) $\{\emptyset\} \in A$       | (e) $\{\{\emptyset\}\} \in A$       | (g) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$       |
| (b) $\emptyset \subseteq A$ | (d) $\{\emptyset\} \subseteq A$ | (f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ | (h) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$ |

**3.2. Feladat.** Legyen az alaphalmaz  $U = \{a, b, c, d, e\}$  és tekintsük a következő halmazokat:  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{d, e\}$  és  $C = \{a, b, e\}$ . Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{B}, \quad A \setminus B, \quad A \Delta B, \quad (A \Delta \overline{C}) \setminus \overline{B}, \quad \mathcal{P}(B).$$

**3.3. Feladat.** Legyen  $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$  és  $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$ . Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \Delta B.$$

**3.4. Feladat.** Határozzuk meg a  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$  halmaz elemeit.

**3.5. Feladat.** Döntsük el, hogy az  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  halmaz hatványhalmazának alábbi részal-  
mazai osztályozásai-e az  $A$  halmaznak.

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$    | (d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$  |
| (b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$    | (e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$ |
| (c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$ | (f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$            |

**3.6. Feladat.** Adjunk meg az  $\{1, 2, \dots, 7\}$  halmazon egy olyan osztályozást, melynek

- (a) legalább 3 osztálya van;
- (b) pontosan 3 osztálya van;
- (c) két osztálya van és mindegyik legalább kételemű;
- (d) három osztálya van és mindegyik legalább háromelemű.

**3.7. Feladat.** Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges  $A, B, C$  halmazok esetén a következő egyenlőségek.

- |   |  |
|---|--|
| (a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$               | (e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$           |
| (b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$                  | (f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$ |
| (c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ | (g) $(A \Delta B) \Delta (A \cap B) = A \cup B$                |
| (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$            |  |

**3.8. Feladat.** Adjuk meg az  $A \cup (B \cap (C \cup D))$  halmaz komplementerét az  $A, B, C, D$  halmazok és komplementereik segítségével.

**3.9. Feladat.** Van-e olyan  $A, B, C$  halmaz, melyre  $A \subseteq B \in C$  és  $A \in B \subseteq C$  is teljesül?

**3.10. Feladat.** Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan  $A, B$  halmazokra, amelyekre  $A \cup B \subseteq B$ .

(a)  $A \subseteq B$

(b)  $A = B$

(c)  $B \setminus A = \emptyset$

**3.11. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges  $A, B, C, D$  halmazokra teljesül, hogy

(a)  $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$ ;

(b)  $(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \supseteq (A \cap C \cap D)$ .

**3.12. Feladat.** Vezessünk be egy új műveletet a halmazok körében: legyen  $A$  és  $B$  az  $U$  univerzum részhalmaza, és legyen  $A \sqcap B := \overline{A \cap B}$ . Igazoljuk, hogy  $\overline{\overline{A}} = A \sqcap A$  és  $A \cap B = (A \sqcap B) \sqcap (A \sqcap B)$ . Hogyan fejezhető ki az egyesítés a  $\sqcap$  művelet segítségével?

**3.13. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi  $A$  és  $B$  halmazok esetén  $A \times B$ -t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

(a)  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{-1, 0, 2\}$

(b)  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = [1; 3)$

(c)  $A = (-1; 2]$ ,  $B = [1; 3)$

**3.14. Feladat.** Előállnak-e a következő (kék) ponthalmazok a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként?

