

2. feladatsor – Predikátumkalkulus elemei

2.1. Feladat megoldása.

- (a) A 7 páros szám.
- (b) A 4 négyzetszám, és 12 nemnegatív.
- (c) Minden szám 4-szerese osztható 2-vel.
- (d) A 6-nak létezik páros osztója.
- (e) Minden 4-gyel osztható szám páros.
- (f) Minden négyzetszámnak van páros többszöröse.
- (g) Létezik olyan páros szám, melynek nincs páros negatív osztója.

2.2. Feladat megoldása.

Részkiefejezések: $x, a, y, f(x, a), f(y, x)$.

Részformulák: $P(f(x, a), x), (\forall x)P(f(x, a), x), Q(x), P(f(y, x), y), P(f(y, x), y), P(f(y, x), y) \wedge Q(x), (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x)), (\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x))$.

Pirossal jelölve a kötött előfordulás, zölddel a szabad előfordulás:

$$(\forall x) P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y) (P(f(y, x), y) \wedge Q(x)).$$

Tehát y kötött változó, mert minden előfordulása kötött; x vegyes változó, mert van szabad és kötött előfordulása is.

2.3. Feladat megoldása.

- (a) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg V(x))$
- (b) $(\forall x)(H(x) \rightarrow V(x))$
- (c) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg(\exists y)B(y, x))$
- (d) $(\exists x)(H(x) \wedge (\forall y)(T(y, x) \rightarrow C(y, x)))$
- (e) $(\exists x)(F(x) \wedge \neg(\exists y)(\neg F(y) \wedge T(y, x)))$
- (f) $(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg F(x)) \wedge (\exists x)(\neg F(x) \wedge \neg A(x))$
- (g) $(\forall x)(B(x, p) \rightarrow H(x))$
- (h) $(\exists x)(H(x) \wedge (\neg S(a(x))))$
- (i) $S(a(p))$

2.4. Feladat megoldása.

Predikátumok: $O(x, y)$: „ x osztja y -t”, $N(x)$: „ x nullára végződik”, $P(x)$: „ x pozitív”, $K(x, y)$: „ x kisebb y -nél”.

Függvények: $f(x)$: „ x négyzete”.

- (a) $(\forall x)(O(1, x) \wedge O(x, x))$
 $\neg[(\forall x)(O(1, x) \wedge O(x, x))] \equiv (\exists x)(\neg O(1, x) \vee \neg O(x, x))$
- (b) $(\forall x)(\exists y)K(y, x)$
 $\neg[(\forall x)(\exists y)K(y, x)] \equiv (\exists x)(\forall y)\neg K(y, x)$
- (c) $(\forall x)(O(10, x) \rightarrow N(x))$
 $\neg[(\forall x)(O(10, x) \rightarrow N(x))] \equiv (\exists x)(O(10, x) \wedge \neg N(x))$
- (d) $(\exists x)(K(x, 0) \wedge P(f(x)))$
 $\neg[(\exists x)(K(x, 0) \wedge P(f(x)))] \equiv (\forall x)(\neg K(x, 0) \vee \neg P(f(x)))$

$$(e) (\forall x)(P(x) \vee K(x, 0)) \\ \neg[(\forall x)(P(x) \vee K(x, 0))] \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg K(x, 0))$$

2.5. Feladat megoldása.

Individuumkonstansok: m : „Mézga Géza”.

Predikátumok: $I(x)$: „ x informatikus”; $E(x)$: „ x éhes”; $S(x)$: „ x szakács”; $K(x, y)$: „ x kedveli y -t”; $F(x, y)$: „ x főz y -nak”; $Sz(x)$: „ x szerencsés”; $G(x, y)$: „ x gyermeke y -nak”.

Függvények: $g(x)$: „ x gyereke”.

- (a) $(\forall x)(I(x) \rightarrow E(x))$
Tagadása: $(\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$, *Van olyan informatikus, aki nem éhes.*
- (b) $(\forall x)((E(x) \wedge S(x)) \rightarrow F(x, x))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge S(x) \wedge \neg F(x, x))$, *Van olyan éhes szakács, aki nem főz magának.*
- (c) $(\forall x)((E(x) \wedge I(x)) \rightarrow (\forall y)(S(y) \rightarrow K(x, y)))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge I(x) \wedge (\exists y)(S(y) \wedge \neg K(x, y)))$, *Van olyan éhes informatikus, aki nem kedvel minden szakácsot.*
- (d) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(F(x, y) \rightarrow I(y)))$,
Tagadása: $(\forall x)(S(x) \rightarrow (\exists y)(F(x, y) \wedge \neg I(y)))$, *A szakácsok nem csak informatikusoknak főznek.*
- (e) $(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge F(y, x) \wedge S(y)) \rightarrow K(x, y))$,
Tagadása: $(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge F(y, x) \wedge S(y) \wedge \neg K(x, y))$, *Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.*
- (f) $\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x, m) \rightarrow Sz(x))$,
Tagadása: $Sz(m) \vee (\exists x)(G(x, m) \wedge \neg Sz(x))$, *Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.*
- (g) $(S(m) \wedge (\forall x) \neg E(x)) \rightarrow (\forall x) Sz(x)$,
Tagadása: $S(m) \wedge (\forall x) \neg E(x) \wedge (\exists x) \neg Sz(x)$, *Mézga Géza a szakács, senki sem éhes, és van aki nem szerencsés.*

2.6. Feladat megoldása.

- (a) Igen.
(b) Igen.

2.7. Feladat megoldása.

- (a) Igen.
(b) Nem.
(c) Igen.
(d) Igen.