1. feladatsor – Ítéletkalkulus elemei

1.1. Feladat. Formalizáljuk az alábbi állításokat a megadott prímítéletek felhasználásával:
A : „Süt a nap." B : „Kimegyek az uszodába." C : „Hamburgert ebédelek."

(a) Kimegyek az uszodába, vagy hamburgert ebédelek.
(b) Kimegyek az uszodába, de nem ebédelek hamburgert.
(c) Nem süt a nap.
(d) Ha kimegyek az uszodába, hamburgert ebédelek.
(e) Pontosan akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

1.2. Feladat. Adjuk meg az alábbi formula összes részformuláját.

$$(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \to B)$$

1.3. Feladat. Döntsük el, hogy az

$$\begin{array}{llll} (a) & (A \leftrightarrow B) \vee \big((\neg B) \wedge C\big) & (b) & (A \leftrightarrow B) \vee \big((\neg B) \to C\big) \\ (c) & A \leftrightarrow \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big) & (d) & A \to \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big) \end{array}$$

formulák közül — a prímítéletek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgép, vagy ha nem bírja el a repülőgép, de indul hajó Afrikába.

1.4. Feladat. A prímítéletelek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket.

(a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok egy piros pontot, és örülhetek.*
(b) *Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.*
(c) *Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.*
(d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*
(e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*
(f) *Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld, vagy az asztal lekváros lesz.*
(g) *Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.*
(h) *Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.*
(i) *Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.*
(j) *Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.*
(k) *Ha még egy *** mondatot formalizálnom kell, akkor kitépem a hajamat, vagy megőrülök és utána tépem ki a hajamat.*

1.5. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a prímítéletek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A prímítéletek mindig pozitívak legyenek, azaz ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük $A, B, C, \ldots$ betűkkel.)

(a) *Ha nem fáj a lábam és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el sörözni, ha a haverom is velem jön.* $A : h,\ B : h,\ C : i,\ D : h.$

(b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára.*
$A : i,\ B : h,\ C : i,\ D : h,\ E : i.$

(c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.* $A : i,\ B : i,\ C : i,\ D : h,\ E : h.$

1.6. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket. Mit mondhatunk a (2) ítéletek igazságértékéről, ha igaznak fogadjuk el az (1) ítéleteket?

(a) (1) *Esik az eső, de nem fázom meg.*
(2) *Ha hideg van, vagy esik az eső, akkor megfázom.*

(b) (1) *Piroska szereti a Farkast, de ha Nagyi nem evett epret, akkor a Farkas megeszi a Nagyit.*
Ha a Farkas megeszi a Nagyit, akkor Piroska nem szereti a Farkast.
A Vadász lelőtte a Farkast.
(2) *Ha a Vadász lelőtte a Farkast, akkor a Nagyi pontosan akkor evett epret, ha nem igaz az, hogy Piroska szereti a Farkast vagy a Farkas megeszi a Nagyit.*

(c) (1) *Hófehérke pontosan akkor eszi meg a mérgezett almát, ha egyedül marad otthon.*
Ha Hófehérke megeszi a mérgezett almát, akkor nem főz ebédet és nem takarít.
Hófehérke egyedül marad otthon.
(2) *Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor pontosan abban az esetben főz ebédet, ha nem takarít.*
Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor megeszi a mérgezett almát, ha viszont nem marad egyedül otthon, akkor nem főz ebédet és nem takarít.

1.7. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy logikailag ekvivalensek-e.

(a) (1) *Ha nem tanulsz vagy puskázol, akkor megbuksz.*
(2) *Ha nem tanulsz, akkor megbuksz, valamint ha puskázol, akkor is megbuksz.*

(b) (1) *A Sárkányfűárus pontosan akkor tud árulni a piacon, ha sem Süsü, sem Királyfi nincs a városban.*
(2) *Süsü vagy Királyfi a városban van, vagy a Sárkányfűárus tud árulni a piacon, valamint ha Süsü vagy Királyfi nincs a városban, akkor a Sárkányfűárus nem tud árulni a piacon.*

(c) (1) *Kriszta csak akkor nem bukik meg, ha Mézga Géza pontosan akkor lesz dühös, ha Aladár szivarozni kezd.*
(2) *Kriszta megbukik vagy Aladár nem kezd el szivarozni vagy Mézga Géza dühös lesz, valamint ha Kriszta nem bukik meg és Aladár sem kezd el szivarozni, akkor Mézga Géza nem lesz dühös.*

1.8. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

(a) $(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$;

(b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$;
(c) $(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv (A \vee B) \to C$;
(d) $(A \to B) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge C)) \equiv A \to (A \vee B)$;
(e) $(A \to B) \to ((A \vee C) \to (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \to A$;
(f) $((A \wedge B) \to A) \wedge (A \to (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg (C \wedge A))$.

1.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia, és melyik nem:

(a) $\big(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg (A \to (\neg A))\big)$;
(b) $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$;
(c) $A \to (A \wedge B)$;
(d) $A \vee \big(B \to (\neg A)\big)$;
(e) $(A \vee B) \to ((A \vee (\neg B)) \to A)$;
(f) $\big(B \vee (\neg A)\big) \to \big(B \vee (\neg A)\big)$;
(g) $\big(((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C\big) \leftrightarrow \big((A \leftrightarrow C) \wedge A\big)$.

1.10. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy kielégíthetőek-e a következő formula- és ítélethalmazok.

(a) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
(b) $(A \vee B) \to (C \wedge D),\ (D \vee E) \to G,\ A \vee (\neg G)$
(c) A szerződést akkor és csak akkor teljesítik, ha a házat februárban befejezik. Ha a házat februárban befejezik, akkor március 1-én beköltözhetünk. Ha március 1-jén nem költözünk be, akkor márciusra lakbért kell fizetnünk. Ha a szerződést nem teljesítik, akkor márciusra lakbért kell fizetnünk. Nem kell márciusra lakbért fizetnünk.

1.11. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma:

$F_1 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (\neg B))$,
$F_2 = (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C)$,
$F_3 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C))$,
$F_4 = (\neg A) \wedge B \wedge C$.

1.12. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját:

(a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C)$;
(b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C$;
(c) $(A \vee B) \to \big(\neg (C \to B)\big)$;
(d) $(A \vee (\neg B)) \to (C \leftrightarrow B)$;
(e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \to (\neg B)) \vee (A \wedge B))$;
(f) $(\neg (A \to B)) \wedge \big(((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B\big)$.