Diszkrét matematika gyakorlat

1. ZH — 2016. október 10. — α csoport

---

1. Feladat. (5 pont) Adja meg az $\alpha^{-1}\beta$ szorzatrelációt, amennyiben

$$\begin{aligned}\alpha &= \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,4),(4,4)\} \subseteq A^2,\\ \beta &= \{(a,b)\colon 2 \mid a-b\} \subseteq A^2,\end{aligned}$$

ahol $A = \{1,2,3,4\}$.

(a) Igaz-e, hogy a β reláció reflexív?
(b) Igaz-e, hogy a α reláció dichotom?

1. Feladat megoldása.

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} &= \{(2,1),(3,1),(1,2),(1,3),(4,3),(4,4)\}\\ \beta &= \{(2,4),(4,2),(1,3),(3,1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}\end{aligned}$$

$$\alpha^{-1}\beta = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

(a) Nem reflexív, mert például $(1,1) \notin \beta$.
(b) Nem dichotom, mert $(1,4) \notin \alpha$ és $(4,1) \notin \alpha$.

---

2. Feladat. (4 pont) Vizsgálja meg az

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto |n+2| - 2$$

leképezést injektivitás, szürjektivitás és bijektivitás szempontjából.

2. Feladat megoldása.

Injektív:

$$\begin{aligned}nf &= mf\\ |n+2|-2 &= |m+2|-2\\ |n+2| &= |m+2|\\ n+2 &= m+2\\ n &= m\end{aligned}$$

Nem szürjektív: a -10-nek nincs őse.

Nem bijektív, mert nem szürjektív.

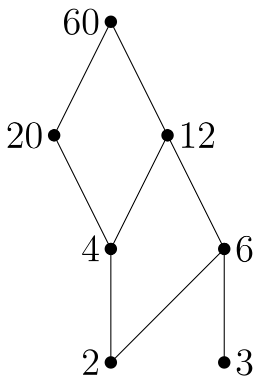
---

3. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $(A, |)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját, amennyiben

$$A = \{2,3,4,6,12,20,60\}.$$

Adja meg a részbenrendezett halmaz legnagyobb, legkisebb, minimális és maximális elemeit.

3. Feladat megoldása.



Legnagyobb elem: 60

Legkisebb elem: nincs

Maximális elem: 60

Minimális elemek: $2, 3$

---

4. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $A \setminus (B \triangle C)$ halmaz hatványhalmazát, ha $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $C = \{3, 4\}$ és az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Továbbá adja meg az U halmaz egy négyelemű osztályozását.

4. Feladat megoldása. $B \triangle C = \{2, 4, 5\}$, $A \setminus (B \triangle C) = \{1, 3\}$
$\mathcal{P}(A \setminus (B \triangle C)) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$

---

5. Feladat. (4 pont) Adja meg a

$$\frac{1-3i}{2+5i} \quad \text{és} \quad i^{21}$$

komplex számok értékét.

5. Feladat megoldása.

$$\frac{1-3i}{2+5i} = \frac{1-3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{2-5i-6i-15}{4+15} = -\frac{13}{29} - \frac{11}{29}i$$

$$i^{21} = \left(i^2\right)^{10} \cdot i = (-1)^{10} \cdot i = i$$

Diszkrét matematika gyakorlat

1. ZH — 2016. október 10. — β csoport

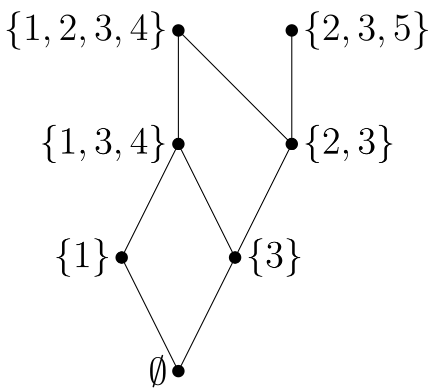
---

1. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $(A, \subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját, amennyiben

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,5\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

Adja meg a részbenrendezett halmaz legnagyobb, legkisebb, minimális és maximális elemeit.

1. Feladat megoldása.



Legnagyobb elem: nincs

Legkisebb elem: $\emptyset$

Maximális elemek: $\{2,3,5\}, \{1,2,3,4\}$

Minimális elem: $\emptyset$

---

2. Feladat. (5 pont) Határozza meg a valós számokon értelmezett

$$\alpha = \{(x,y) \colon x = y + 2\} \text{ és } \beta = \{(x,y) \colon 3^x = y - 1\}$$

relációk $\alpha\beta^{-1}$ szorzatát.

(a) Igaz-e, hogy az α reláció szimmetrikus?
(b) Igaz-e, hogy a β reláció dichotom?

2. Feladat megoldása.

$$\beta^{-1} = \{(x,y) \colon 3^y = x - 1\}$$

$$(x,k) \in \alpha \iff x = k + 2 \iff k = x - 2, \qquad (k,y) \in \beta^{-1} \iff 3^y = k - 1$$

$$(x,y) \in \alpha\beta^{-1} \iff 3^y = (x-2) - 1 \iff 3^y = x - 3$$

$$\alpha\beta^{-1} = \{(x,y) \colon 3^y = x - 3\}$$

(a) Nem szimmetrikus: $(3,1) \in \alpha$, de $(1,3) \notin \alpha$.
(b) Nem dichotom, mert $(1,10) \notin \alpha$ és $(10,1) \notin \alpha$.

---

3. Feladat. (4 pont)

(a) Vizsgálja meg az $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x-1, x+1)$ leképezést injektivitás és szürjektivitás szempontjából.
(b) Létezik-e bijekció a $\mathbb{Z}^2$ és $\mathbb{R}^2$ halmazok között?
(c) Határozza meg a $\mathbb{Q}^3 \times (\mathbb{N}^2 \cup \mathbb{R})$ halmaz számosságát.

3. Feladat megoldása.

Injektív:

$$\begin{aligned} n\alpha &= m\alpha \\ (n-1, n+1) &= (m-1, m+1) \\ n-1 = m-1 & \qquad n+1 = m+1 \\ n = m &= n = m \end{aligned}$$

Nem szürjektív: a $(2, 76)$-nak nincs őse.

Nem bijektív, mert nem szürjektív.

---

4. Feladat. (4 pont) Határozza meg az $\overline{A} \triangle (B \setminus C)$ halmazt, ha $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{4, 5\}$ és az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Adja meg az alaphalmaz két különböző 3 elemű osztályozását.

4. Feladat megoldása. $\overline{A} = \{1, 4, 5\}$, $B \setminus C = \{1, 2\}$, $\overline{A} \triangle (B \setminus C) = \{2, 4, 5\}$
$\mathcal{C}_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\}$

---

5. Feladat. (5 pont) Legyen $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + i$ és $z_3 = 3 - 2i$ három komplex szám. Határozza meg a

$$\frac{z_2 - \overline{z_1}}{z_3}$$

komplex szám értékét.

5. Feladat megoldása.

$$\overline{z_1} = 1 + 2i, \quad z_2 - \overline{z_1} = 2 - i$$

$$\frac{z_2 - \overline{z_1}}{z_3} = \frac{2-i}{3-2i} = \frac{2-i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{6 + 4i - 3i + 2}{9+4} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$$

Diszkrét matematika gyakorlat

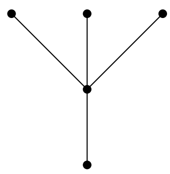
1. ZH — 2016. október 10. — μ csoport

---

1. Feladat. (4 pont) Adjon meg olyan 5 csúcsú Hasse-diagrammot, melynek ...

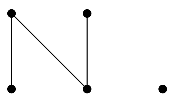
(a) 1 legkisebb és három maximális eleme van.
(b) 3 maximális és 3 minimális eleme van.
(c) 2 legnagyobb és 1 minimális eleme van.

1. Feladat megoldása.



(a)

(b)



(c) Nincs ilyen, mert csak 1 darab legnagyobb elem létezhet.

---

2. Feladat. (5 pont) Vizsgálja meg a $\rho = \{(x,y)\colon |x-y| \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ relációt reflexivitás, szimmetria és dichotomia szempontjából. Adja meg a reláció inverzét. Igaz-e, hogy a reláció megegyezik az inverzével?

2. Feladat megoldása.

- A reláció reflexív, mert bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $|x-x| = 0 \geq 0$.
- A reláció szimmetrikus, mert $|x-y| \geq 0$ esetén $|y-x| = |-(x-y)| = |x-y| \geq 0$ is teljesül.
- A reláció dichotom, mert bármely két szám különbségének abszolút értéke nemnegatív szám.
- $\rho^{-1} = \{(x,y)\colon |y-x| \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\rho = \mathbb{R}^2 = \rho^{-1}$

---

3. Feladat. (4 pont) Igazak-e a következő állítások?

(a) Az $\alpha : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \mapsto x+y$ leképezés szürjektív.
(b) A $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1-|x|$ leképezés injektív.
(c) A $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{4}{x}$ leképezés bijektív.

3. Feladat megoldása.

(a) Igaz. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ egész számra teljesül, hogy $(0,n) \mapsto n$.
(b) Hamis, mert $1 \mapsto 0$ és $-1 \mapsto 0$ de $1 \neq -1$.
(c) Nem bijektív, mert nem szürjektív. Többek között például a nullának nincs őse.

---

4. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $\overline{A} \setminus (B \triangle C)$ halmaz hatványhalmazát, ha $A = \{3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,4,5\}$ és az alaphalmaz $U = \{1,2,3,4,5\}$.

4. Feladat megoldása. $B \triangle C = \{3, 4, 5\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 5\}$, $\overline{A} \setminus (B \triangle C) = \{1, 2\}$
$\mathcal{P}(\overline{A} \setminus (B \triangle C)) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

---

5. Feladat. (5 pont) Legyen $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 - 2i$ és $z_3 = 2 + 5i$ három komplex szám. Határozza meg a

$$\frac{\overline{z_2} - z_1}{z_3}$$

komplex szám értékét.

5. Feladat megoldása.

$$\frac{\overline{z_2} - z_1}{z_3} = \frac{1 + 2i - (2 - 3i)}{2 + 5i} = \frac{-1 + 5i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{-2 + 5i + 10i + 25}{4 + 25} = \frac{23 + 15i}{29} = \frac{23}{29} + \frac{15}{29}i$$

Diszkrét matematika gyakorlat

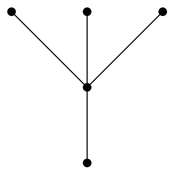
1. ZH — 2016. október 10. — μ csoport

---

1. Feladat. (4 pont) Adjon meg olyan 5 csúcsú Hasse-diagrammot, melynek ...

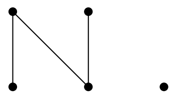
(a) 1 legkisebb és három maximális eleme van.
(b) 3 maximális és 3 minimális eleme van.
(c) 2 legnagyobb és 1 minimális eleme van.

1. Feladat megoldása.



(a)

(b)



(c) Nincs ilyen, mert csak 1 darab legnagyobb elem létezhet.

---

2. Feladat. (5 pont) Vizsgálja meg a $\rho = \{(x, y) \colon |x - y| \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ relációt reflexivitás, szimmetria és dichotomia szempontjából. Adja meg a reláció inverzét. Igaz-e, hogy a reláció megegyezik az inverzével?

2. Feladat megoldása.

- A reláció reflexív, mert bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $|x - x| = 0 \geq 0$.
- A reláció szimmetrikus, mert $|x - y| \geq 0$ esetén $|y - x| = |-(x - y)| = |x - y| \geq 0$ is teljesül.
- A reláció dichotom, mert bármely két szám különbségének abszolút értéke nemnegatív szám.
- $\rho^{-1} = \{(x, y) \colon |y - x| \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\rho = \mathbb{R}^2 = \rho^{-1}$

---

3. Feladat. (4 pont) Igazak-e a következő állítások?

(a) Az $\alpha : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ leképezés szürjektív.
(b) A $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - |x|$ leképezés injektív.
(c) A $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{4}{x}$ leképezés bijektív.

3. Feladat megoldása.

(a) Igaz. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ egész számra teljesül, hogy $(0, n) \mapsto n$.
(b) Hamis, mert $1 \mapsto 0$ és $-1 \mapsto 0$ de $1 \neq -1$.
(c) Nem bijektív, mert nem szürjektív. Többek között például a nullának nincs őse.

---

4. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $\overline{A} \setminus (B \triangle C)$ halmaz hatványhalmazát, ha $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2, 4, 5\}$ és az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Feladat megoldása. $B \triangle C = \{3, 4, 5\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 5\}$, $\overline{A} \setminus (B \triangle C) = \{1, 2\}$
$\mathcal{P}(\overline{A} \setminus (B \triangle C)) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

---

5. Feladat. (5 pont) Határozza meg a $\frac{(1-3i)-\overline{(2+i)}}{5-2i}$ komplex szám értékét.

5. Feladat megoldása.

$$\frac{(1-3i)-\overline{(2+i)}}{5-2i} = \frac{1-3i-(2-i)}{5-2i} = \frac{-1-2i}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{-5-2i-10i+4}{29} = -\frac{1}{29} - \frac{12}{29}i$$

Diszkrét matematika gyakorlat

1. ZH — 2016. október 10. — ζ csoport

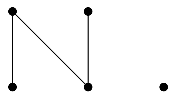
---

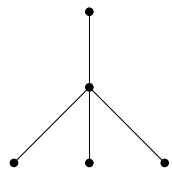
1. Feladat. (4 pont) Adjon meg olyan 5 csúcsú Hasse-diagrammot, melynek ...

(a) 2 legkisebb és 1 maximális eleme van.
(b) 3 maximális és 3 minimális eleme van.
(c) 1 legnagyobb és 2 minimális eleme van.

1. Feladat megoldása.

(a) Nincs ilyen, mert csak 1 darab legnagyobb elem létezhet.

(b) 

(c) 

---

2. Feladat. (5 pont) Vizsgálja meg a $\rho = \{(x, y) \colon (x - y)^2 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ relációt reflexivitás, szimmetria és dichotomia szempontjából. Adja meg a reláció inverzét. Igaz-e, hogy a reláció megegyezik az inverzével?

2. Feladat megoldása.

- A reláció nem reflexív, mert $(5-5)^2 = 0 \not> 0$.
- A reláció szimmetrikus, mert $(x-y)^2 > 0$ esetén $(y-x)^2 = (-(x-y))^2 = (x-y)^2 > 0$ is teljesül.
- A reláció nem dichotom, mert nem reflexív.
- $\rho^{-1} = \{(x, y) \colon (y - x)^2 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\rho = \rho^{-1}$ mert pontosan ugyanazok az elemeik (csak az (x, x) alakú párok nincsenek benne a relációkban)

---

3. Feladat. (4 pont) Igazak-e a következő állítások?

(a) Az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3}{x}$ leképezés bijektív.
(b) A $\gamma : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto 2x + y$ leképezés szürjektív.
(c) A $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x^2$ leképezés injektív.

3. Feladat megoldása.

(a) Nem bijektív, mert nem szürjektív, a nullának nincs őse.
(b) Szürjektív, mert tetszőleges $m \in \mathbb{Z}$ esetén $(0, z) \mapsto z$.
(c) Nem injektív, mert $1 \mapsto 0$ és $-1 \mapsto 0$ de $1 \neq -1$.

---

4. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $\overline{A} \setminus (B \triangle C)$ halmaz hatványhalmazát, ha $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2, 4, 5\}$ és az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Feladat megoldása. $B \triangle C = \{3, 4, 5\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 5\}$, $\overline{A} \setminus (B \triangle C) = \{1, 2\}$
$\mathcal{P}(\overline{A} \setminus (B \triangle C)) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

---

5. Feladat. (5 pont) Határozza meg a $\frac{(1-3i)-\overline{(2+i)}}{5-2i}$ komplex szám értékét.

5. Feladat megoldása.

$$\frac{(1-3i)-\overline{(2+i)}}{5-2i} = \frac{1-3i-(2+i)}{5-2i} = \frac{-1-4i}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{-5-2i-20i+8}{29} = \frac{3}{29} - \frac{22}{29}i$$
