Diszkrét matematika I. gyakorlat

Vizsgafeladatok megoldása

Bogya Norbert

SZTE, Bolyai Intézet

2016. december 8.

Tartalom

1. Mátrix inverze
2. Negáció (predikátumkalkulus)
3. Determináns
4. Osztályozás
5. Lineáris függetlenség
6. Halmazműveletek
7. Lineáris algebra (elméleti kérdések)
8. Számosságok
9. Leképezések tulajdonságai
10. Ítéletkalkulus

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	−1 ◯	−2 ◯

−3 ◯	egyik sem ◯	!

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	−1 ◯	−2 ◯

−3 ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}$$

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	−1 ○	−2 ○

−3 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	−1 ○	−2 ○

−3 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ⊗	−1 ○	−2 ○

−3 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$\begin{aligned} F: &\quad (\forall x)(\exists y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \\ G: &\quad (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big) \\ H: &\quad (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \end{aligned}$$

formulák közül?

!	F ◯	G ◯	H ◯	egyik sem	!

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$
\begin{array}{ll}
F: & (\forall x)(\exists y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \\
G: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big) \\
H: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big)
\end{array}
$$

formulák közül?

!	F ○	G ○	H ○	egyik sem	!

Megoldás:

$$\neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$\begin{array}{ll} F: & (\forall x)(\exists y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \\ G: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big) \\ H: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \end{array}$$

formulák közül?

!	F ○	G ○	H ○	egyik sem	!

Megoldás:

$$\neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \quad \equiv \quad (\exists x)\neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$\begin{array}{ll} F: & (\forall x)(\exists y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \\ G: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big) \\ H: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \end{array}$$

formulák közül?

!	F ○	G ○	H ○	egyik sem	!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) &\equiv (\exists x)\neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \\ &\equiv (\exists x)(\forall y)\neg(A(x) \wedge B(y)) \end{aligned}$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$\begin{array}{ll} F: & (\forall x)(\exists y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \\ G: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big) \\ H: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \end{array}$$

formulák közül?

!	F ◯	G ◯	H ◯	egyik sem	!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) &\equiv (\exists x)\neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \\ &\equiv (\exists x)(\forall y)\neg(A(x) \wedge B(y)) \\ &\equiv (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \end{aligned}$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$\begin{array}{ll} F: & (\forall x)(\exists y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \\ G: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big) \\ H: & (\exists x)(\forall y)\big(\neg A(x) \wedge \neg B(y)\big) \end{array}$$

formulák közül?

!	F ○	G ⊗	H ○	egyik sem	!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) &\equiv (\exists x)\neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \\ &\equiv (\exists x)(\forall y)\neg(A(x) \wedge B(y)) \\ &\equiv (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \\ &\equiv G \end{aligned}$$

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ○	1 ○	−1 ○	2 ○	−2 ○	5 ○	−6 ○

12 ○	egyik sem ○	!

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ◯	1 ◯	-1 ◯	2 ◯	-2 ◯	5 ◯	-6 ◯

12 ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ◯	1 ◯	-1 ◯	2 ◯	-2 ◯	5 ◯	-6 ◯

12 ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ○	1 ○	−1 ○	2 ○	−2 ○	5 ○	−6 ○

12 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4$$

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ○	1 ⊗	−1 ○	2 ○	−2 ○	5 ○	−6 ○	12 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $\mathcal{C} = \{\{0, 1, 4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset$ ◯	$\{3, 5\}$ ◯	$\{4, 5\}$ ◯	A ◯	$\{1, 3, 5\}$ ◯	egyik sem ◯	!

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $\mathcal{C} = \{\{0, 1, 4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset$ ◯	$\{3, 5\}$ ◯	$\{4, 5\}$ ◯	A ◯	$\{1, 3, 5\}$ ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás: Mikor lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $\mathcal{C} = \{\{0, 1, 4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset$ ◯	$\{3, 5\}$ ◯	$\{4, 5\}$ ◯	A ◯	$\{1, 3, 5\}$ ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás: Mikor lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

- Az A minden eleme benne legyen egyen blokkban.
- Az A minden eleme pontosan egy blokkban legyen.
- Egyik blokk sem lehet az üres halmaz.

(4) Legyen $A = \{0,1,2,3,4,5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $\mathcal{C} = \{\{0,1,4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset$ ○	$\{3,5\}$ $\otimes$	$\{4,5\}$ ○	A ○	$\{1,3,5\}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás: Mikor lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

- Az A minden eleme benne legyen egyen blokkban.
- Az A minden eleme pontosan egy blokkban legyen.
- Egyik blokk sem lehet az üres halmaz.

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: &\quad (-5,-5,-3),\ (5,5,3),\ (10,10,6); \\ \mathcal{F}: &\quad (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0); \\ \mathcal{G}: &\quad (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,0). \end{aligned}$$

Melyek lineárisan függőek közülük?

?	$\mathcal{E}$ ◯	$\mathcal{F}$ ◯	$\mathcal{G}$ ◯	egyik sem ◯	?

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}: &\quad (-5,-5,-3),\ (5,5,3),\ (10,10,6);\\ \mathcal{F}: &\quad (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0);\\ \mathcal{G}: &\quad (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,0).\end{aligned}$$

Melyek lineárisan függőek közülük?

?	$\mathcal{E}$ ◯	$\mathcal{F}$ ◯	$\mathcal{G}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: &\quad (-5,-5,-3),\ (5,5,3),\ (10,10,6);\\ \mathcal{F}: &\quad (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0);\\ \mathcal{G}: &\quad (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,0). \end{aligned}$$

Melyek lineárisan függőek közülük?

?	$\mathcal{E}$ ◯	$\mathcal{F}$ ◯	$\mathcal{G}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- $\mathcal{E}$ függő: $1v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0,0,0)$

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}: &\quad (-5,-5,-3),\ (5,5,3),\ (10,10,6);\\ \mathcal{F}: &\quad (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0);\\ \mathcal{G}: &\quad (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,0).\end{aligned}$$

Melyek lineárisan függőek közülük?

?	$\mathcal{E}$ ◯	$\mathcal{F}$ ◯	$\mathcal{G}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- $\mathcal{E}$ függő: $1v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0,0,0)$
- $\mathcal{F}$ független: valamilyen értelemben ez már lépcsős alakú

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}: &\quad (-5,-5,-3),\ (5,5,3),\ (10,10,6);\\
\mathcal{F}: &\quad (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0);\\
\mathcal{G}: &\quad (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,0).
\end{aligned}$$

Melyek lineárisan függőek közülük?

?	$\mathcal{E}$ ◯	$\mathcal{F}$ ◯	$\mathcal{G}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- $\mathcal{E}$ függő: $1v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0,0,0)$
- $\mathcal{F}$ független: valamilyen értelemben ez már lépcsős alakú
- $\mathcal{G}$ függő: tartalmazza a nullvektort

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: &\quad (-5,-5,-3),\ (5,5,3),\ (10,10,6); \\ \mathcal{F}: &\quad (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0); \\ \mathcal{G}: &\quad (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,0). \end{aligned}$$

Melyek lineárisan függőek közülük?

?	$\mathcal{E}$ $\otimes$	$\mathcal{F}$ $\bigcirc$	$\mathcal{G}$ $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás:

- $\mathcal{E}$ függő: $1v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0,0,0)$
- $\mathcal{F}$ független: valamilyen értelemben ez már lépcsős alakú
- $\mathcal{G}$ függő: tartalmazza a nullvektort

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \triangle B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	egyik sem ◯	?

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \triangle B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

$$\overline{A} = \{0, 1\}$$

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \triangle B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

$$\overline{A} = \{0, 1\}$$

$$A \cap (\overline{A} \triangle B) = A \cap ((\overline{A} \cup B) \setminus (\overline{A} \cap B))$$

(6) Legyen $U = \{0,1,2,3,4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2,3,4\}$ és $B = \{0,2,4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \triangle B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

$$\overline{A} = \{0,1\}$$

$$A \cap (\overline{A} \triangle B) = A \cap ((\overline{A} \cup B) \setminus (\overline{A} \cap B)) = \{2,3,4\} \cap (\{0,1,2,4\} \setminus \{0\})$$

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \triangle B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

$$\overline{A} = \{0, 1\}$$

$$A \cap (\overline{A} \triangle B) = A \cap ((\overline{A} \cup B) \setminus (\overline{A} \cap B)) = \{2, 3, 4\} \cap (\{0, 1, 2, 4\} \setminus \{0\})$$

$$= \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4\}$$

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \triangle B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ○	1 ○	2 ⊗	3 ○	4 ⊗	egyik sem ○	?

Megoldás:

$$\overline{A} = \{0, 1\}$$

$$A \cap (\overline{A} \triangle B) = A \cap ((\overline{A} \cup B) \setminus (\overline{A} \cap B)) = \{2, 3, 4\} \cap (\{0, 1, 2, 4\} \setminus \{0\})$$

$$= \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4\} = \{2, 4\}$$

(7) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \ldots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik.

!	igen ◯	nem ◯	!

Ha $v_1 + \ldots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \ldots, v_n$ vekt.rendsz. lin. függő.

!	igen ◯	nem ◯	!

Ha A négyzetes mátrix és invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen ◯	nem ◯	!

(7) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \ldots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik.

!	igen ○	nem ⊗	!

Ha $v_1 + \ldots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \ldots, v_n$ vekt.rendsz. lin. függő.

!	igen ○	nem ○	!

Ha A négyzetes mátrix és invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen ○	nem ○	!

(7) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \ldots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik.

!	igen ○	nem ⊗	!

Ha $v_1 + \ldots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \ldots, v_n$ vekt.rendsz. lin. függő.

!	igen ⊗	nem ○	!

Ha A négyzetes mátrix és invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen ○	nem ○	!

(7) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \ldots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik.

!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!

Ha $v_1 + \ldots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \ldots, v_n$ vekt.rendsz. lin. függő.

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

Ha A négyzetes mátrix és invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R}$ ◯	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ◯	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ◯	egyik sem ◯	?

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R}$ ◯	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ◯	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R}$ ◯	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ◯	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- $|\mathbb{R}| = c$

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R}$ ○	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ○	$\mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

- $|\mathbb{R}| = c$
- $|\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \max(\aleph_0, \max(\aleph_0, \aleph_0)) = \aleph_0$

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R}$ ◯	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ◯	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- $|\mathbb{R}| = c$
- $|\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \max(\aleph_0, \max(\aleph_0, \aleph_0)) = \aleph_0$
- $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} = \aleph_0$

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R}$ ○	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ⊗	$\mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ ⊗	egyik sem ○	?

Megoldás:

- $|\mathbb{R}| = c$
- $|\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \max(\aleph_0, \max(\aleph_0, \aleph_0)) = \aleph_0$
- $\mathbb{N} \setminus \{1,2\} = \aleph_0$

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : \quad A \to A, \qquad x \mapsto |x|\,, \text{ továbbá}$$
$$\eta : \quad A \to A, \qquad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj"=„injektív", „szür"=„szürjektív", „bij"=„bijektív".)

?	μ inj ◯	μ szür ◯	μ bij ◯	η inj ◯	η szür ◯	η bij ◯	?

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : \quad A \to A, \qquad x \mapsto |x|\,, \text{ továbbá}$$
$$\eta : \quad A \to A, \qquad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”.)

?	μ inj ◯	μ szür ◯	μ bij ◯	η inj ◯	η szür ◯	η bij ◯	?

Megoldás:

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu: \quad A \to A, \qquad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$
$$\eta: \quad A \to A, \qquad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”.)

?	μ inj ◯	μ szür ◯	μ bij ◯	η inj ◯	η szür ◯	η bij ◯	?

Megoldás:

μ:

Nem injektív: $-3 \mapsto 3$, $3 \mapsto 3$.

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : \quad A \to A, \qquad x \mapsto |x|\,, \text{ továbbá}$$
$$\eta : \quad A \to A, \qquad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”.)

?	μ inj ◯	μ szür ◯	μ bij ◯	η inj ◯	η szür ◯	η bij ◯	?

Megoldás:
μ:
Nem injektív: $-3 \mapsto 3$, $3 \mapsto 3$.
Nem szürjektív: a -2-nek nincs őse.

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : \quad A \to A, \qquad x \mapsto |x|\,, \text{ továbbá}$$
$$\eta : \quad A \to A, \qquad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”.)

?	μ inj ◯	μ szür ◯	μ bij ◯	η inj ◯	η szür ◯	η bij ◯	?

Megoldás:

μ:
Nem injektív: $-3 \mapsto 3$, $3 \mapsto 3$.
Nem szürjektív: a -2-nek nincs őse.

η:
Injektív: ha $-x = -y$, akkor $x = y$.

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu: \quad A \to A, \qquad x \mapsto |x|\,, \text{ továbbá}$$
$$\eta: \quad A \to A, \qquad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj"=„injektív", „szür"=„szürjektív", „bij"=„bijektív".)

?	μ inj ◯	μ szür ◯	μ bij ◯	η inj ◯	η szür ◯	η bij ◯	?

Megoldás:

μ:
Nem injektív: $-3 \mapsto 3$, $3 \mapsto 3$.
Nem szürjektív: a -2-nek nincs őse.

η:
Injektív: ha $-x = -y$, akkor $x = y$.
Szürjektív: minden $y \in A$-hoz van olyan x, hogy $x\eta = y$. $(x = -y)$

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : \quad A \to A, \qquad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$
$$\eta : \quad A \to A, \qquad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”.)

?	μ inj ◯	μ szür ◯	μ bij ◯	η inj ◯	η szür ◯	η bij ◯	?

Megoldás:

μ:
Nem injektív: $-3 \mapsto 3$, $3 \mapsto 3$.
Nem szürjektív: a -2-nek nincs őse.

η:
Injektív: ha $-x = -y$, akkor $x = y$.
Szürjektív: minden $y \in A$-hoz van olyan x, hogy $x\eta = y$. $(x = -y)$
Bijektív: injektív és szürjektív.

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : \quad A \to A, \qquad x \mapsto |x|\,, \text{ továbbá}$$
$$\eta : \quad A \to A, \qquad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj"=„injektív", „szür"=„szürjektív", „bij"=„bijektív".)

?	μ inj ◯	μ szür ◯	μ bij ◯	η inj ⊗	η szür ⊗	η bij ⊗	?

Megoldás:

μ:
Nem injektív: $-3 \mapsto 3$, $3 \mapsto 3$.
Nem szürjektív: a -2-nek nincs őse.

η:
Injektív: ha $-x = -y$, akkor $x = y$.
Szürjektív: minden $y \in A$-hoz van olyan x, hogy $x\eta = y$. $(x = -y)$
Bijektív: injektív és szürjektív.

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \to B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „$(\neg A)$” helyett „$\neg A$” is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B$ ○	$A \wedge (\neg B)$ ○	$(\neg A) \wedge B$ ○	$(\neg A) \wedge (\neg B)$ ○

egyik sem ○	?

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \to B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „$(\neg A)$" helyett „$\neg A$" is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B$ ◯	$A \wedge (\neg B)$ ◯	$(\neg A) \wedge B$ ◯	$(\neg A) \wedge (\neg B)$ ◯

egyik sem ◯	?

Megoldás:

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \to B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „$(\neg A)$" helyett „$\neg A$" is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B$ ◯	$A \wedge (\neg B)$ ◯	$(\neg A) \wedge B$ ◯	$(\neg A) \wedge (\neg B)$ ◯

egyik sem ◯	?

Megoldás:

($\neg$	A)	$\to$	B
h	**i**	i	**i**
h	**i**	i	**h**
i	**h**	i	**i**
i	h	h	h

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \to B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „$(\neg A)$" helyett „$\neg A$" is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B$ ◯	$A \wedge (\neg B)$ ◯	$(\neg A) \wedge B$ ◯	$(\neg A) \wedge (\neg B)$ ◯

egyik sem ◯	?

Megoldás:

$(\neg$	$A)$	$\to$	B
h	**i**	i	**i**
h	**i**	i	**h**
i	**h**	i	**i**
i	h	h	h

$$(\neg A) \to B \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$$

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \to B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „$(\neg A)$" helyett „$\neg A$" is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B$ $\otimes$	$A \wedge (\neg B)$ $\otimes$	$(\neg A) \wedge B$ $\otimes$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$ $\bigcirc$

egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás:

$(\neg$	$A)$	$\to$	B
h	**i**	i	**i**
h	**i**	i	**h**
i	**h**	i	**i**
i	h	h	h

$$(\neg A) \to B \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$$

Tartalom

dmnv1-12.C1-D

1. Relációszorzás
2. Leképezések szorzása, tulajdonságai
3. Reláció tulajdonságai
4. Vektoriális szorzat
5. Mátrix inverze
6. Mátrixok szorzása
7. Lineáris függetlenség (elméleti kérdések)
8. Teljes diszjunktív normálforma
9. Mátrix inverze és szorzás
10. Negáció (predikátumkalkulus)

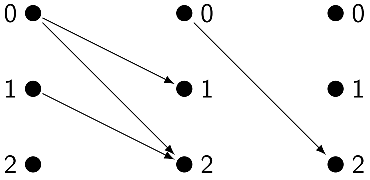
(1) Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$. Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	A^2 ◯	$A^2 \setminus \alpha$ ◯	$\emptyset$ ◯	α ◯	β ◯	egyik sem ◯	!

(1) Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$. Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	A^2 ◯	$A^2 \setminus \alpha$ ◯	$\emptyset$ ◯	α ◯	β ◯	egyik sem ◯	!

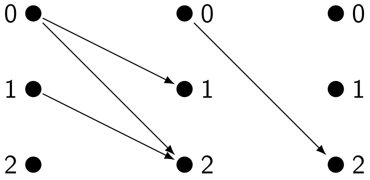
Megoldás



(1) Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$. Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	A^2 ◯	$A^2 \setminus \alpha$ ◯	$\emptyset$ ◯	α ◯	β ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás

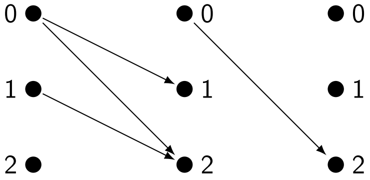


$$\alpha\beta = \emptyset$$

(1) Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$. Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	A^2 ◯	$A^2 \setminus \alpha$ ◯	$\emptyset$ ⊗	α ◯	β ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás



$$\alpha\beta = \emptyset$$

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \to B,\ x \mapsto x + 2, \qquad g : B \to A,\ x \mapsto \left|\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}\right|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ◯	fg injektív ◯	g injektív ◯

g szürjektív ◯	egyik sem ◯	?

(2) Legyen

$$A = \{1,2\}, \qquad B = \{1,2,3,4\},$$

$$f : A \to B,\ x \mapsto x+2, \qquad g : B \to A,\ x \mapsto \left|\{y : y \in B \text{ és } y^2 \le x\}\right|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ◯	fg injektív ◯	g injektív ◯

g szürjektív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \to B,\ x \mapsto x + 2, \qquad g : B \to A,\ x \mapsto \left|\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}\right|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ◯	fg injektív ◯	g injektív ◯

g szürjektív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző
- g nem injektív, mert $1g = 1 = 2g$

(2) Legyen

$$A = \{1,2\}, \qquad B = \{1,2,3,4\},$$

$$f : A \to B,\ x \mapsto x+2, \qquad g : B \to A,\ x \mapsto \left|\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}\right|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ◯	fg injektív ◯	g injektív ◯

g szürjektív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző
- g nem injektív, mert $1g = 1 = 2g$
- g szürjektív, mert $1g = 1$ és $4g = 2$, azaz minden A-beli elemnek van őse

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \to B,\ x \mapsto x + 2, \qquad g : B \to A,\ x \mapsto \left|\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}\right|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ◯	fg injektív ◯	g injektív ◯

g szürjektív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző
- g nem injektív, mert $1g = 1 = 2g$
- g szürjektív, mert $1g = 1$ és $4g = 2$, azaz minden A-beli elemnek van őse
- $fg : 1 \mapsto 1; 2 \mapsto 2$, így az fg injektív

(2) Legyen

$$A = \{1,2\}, \qquad B = \{1,2,3,4\},$$

$$f : A \to B,\ x \mapsto x+2, \qquad g : B \to A,\ x \mapsto \left|\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}\right|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív $\otimes$	fg injektív $\otimes$	g injektív $\bigcirc$

g szürjektív $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző
- g nem injektív, mert $1g = 1 = 2g$
- g szürjektív, mert $1g = 1$ és $4g = 2$, azaz minden A-beli elemnek van őse
- $fg : 1 \mapsto 1; 2 \mapsto 2$, így az fg injektív

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ○	antiszimmetrikus ○	tranzitív ○

szimmetrikus ○	egyik sem ○	?

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ◯	antiszimmetrikus ◯	tranzitív ◯

szimmetrikus ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ◯	antiszimmetrikus ◯	tranzitív ◯

szimmetrikus ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \neq (2, 1)$.

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ◯	antiszimmetrikus ◯	tranzitív ◯

szimmetrikus ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- Nem tranzitív, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 3) \in \alpha$, de $(1, 3) \notin \alpha$.

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ◯	antiszimmetrikus ◯	tranzitív ◯

szimmetrikus ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- Nem tranzitív, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 3) \in \alpha$, de $(1, 3) \notin \alpha$.
- Szimmetrikus, mert bármely $x, y \in A$ elemekre
  $(x, y) \in \alpha \iff |x - y| \text{ páratlan} \iff |y - x| \text{ páratlan} \iff (y, x) \in \alpha$.

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív $\bigcirc$	antiszimmetrikus $\bigcirc$	tranzitív $\bigcirc$

szimmetrikus $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- Nem tranzitív, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 3) \in \alpha$, de $(1, 3) \notin \alpha$.
- Szimmetrikus, mert bármely $x, y \in A$ elemekre $(x, y) \in \alpha \iff |x - y| \text{ páratlan} \iff |y - x| \text{ páratlan} \iff (y, x) \in \alpha$.

(4) Melyik az $(1,3,3) \times (-2,3,1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6,-5,9)$ ○	$(6,9,-7)$ ○	$(-6,-7,9)$ ○

$(3,5,9)$ ○	egyik sem ○	!

(4) Melyik az $(1,3,3) \times (-2,3,1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6,-5,9)$ ◯	$(6,9,-7)$ ◯	$(-6,-7,9)$ ◯

$(3,5,9)$ ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(4) Melyik az $(1,3,3) \times (-2,3,1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6,-5,9)$ ◯	$(6,9,-7)$ ◯	$(-6,-7,9)$ ◯

$(3,5,9)$ ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

(4) Melyik az $(1, 3, 3) \times (-2, 3, 1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6, -5, 9)$ ○	$(6, 9, -7)$ ○	$(-6, -7, 9)$ ○

$(3, 5, 9)$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot (-6) - j \cdot 7 + k \cdot 9$$

(4) Melyik az $(1,3,3)\times(-2,3,1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6,-5,9)$ ○	$(6,9,-7)$ ○	$(-6,-7,9)$ ○

$(3,5,9)$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= i\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= i\cdot(-6) - j\cdot 7 + k\cdot 9 = -6i - 7j + 9k\end{aligned}$$

(4) Melyik az $(1,3,3) \times (-2,3,1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6,-5,9)$ ○	$(6,9,-7)$ ○	$(-6,-7,9)$ ○

$(3,5,9)$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot (-6) - j \cdot 7 + k \cdot 9 = -6i - 7j + 9k = (-6,-7,9)$$

(4) Melyik az $(1,3,3) \times (-2,3,1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6,-5,9)$ ○	$(6,9,-7)$ ○	$(-6,-7,9)$ ⊗

$(3,5,9)$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= i \cdot (-6) - j \cdot 7 + k \cdot 9 = -6i - 7j + 9k = (-6,-7,9)\end{aligned}$$

(5) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ○

egyik sem ○	!

(5) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ⊗

egyik sem ○	!

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

(2) : A 3. sort megszorzom (-1)-gyel.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

(2) : A 3. sort megszorzom (-1)-gyel.

(3) : A 2. sor 2-szeresét hozzáadom az 1. sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

(2) : A 3. sort megszorzom (-1)-gyel.

(3) : A 2. sor 2-szeresét hozzáadom az 1. sorhoz.

(4) : A 3. sort hozzáadom az 1. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

(2) : A 3. sort megszorzom (-1)-gyel.

(3) : A 2. sor 2-szeresét hozzáadom az 1. sorhoz.

(4) : A 3. sort hozzáadom az 1. sorhoz.

(6) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○

egyik sem ○	!

(6) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○

egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & -2 & -1 \\ & & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(6) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⊗

egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{array}{rrr|rrr} & & & 1 & -2 & -1 \\ & & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(7) Legyen $n \geq 2$, és legyen $v_1, \ldots, v_n$ egy vektorrendszer. Az alábbi jelöléseket használva

$\oplus$: valamelyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
$\uplus$: mindegyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
$\bullet$: a zérusvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő

igazak-e a tekintett vektorrendszerre vonatkozó alábbi kijelentések?

Ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $\oplus$.	!	igen ◯	nem ◯	!
Ha $\bullet$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.	!	igen ◯	nem ◯	!
Ha $\uplus$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.	!	igen ◯	nem ◯	!

(7) Legyen $n \geq 2$, és legyen $v_1, \ldots, v_n$ egy vektorrendszer. Az alábbi jelöléseket használva

$\oplus$:	valamelyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
$\uplus$:	mindegyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
$\bullet$:	a zérusvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő

igazak-e a tekintett vektorrendszerre vonatkozó alábbi kijelentések?

Ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $\oplus$.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
Ha $\bullet$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!
Ha $\uplus$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(7) Legyen $n \geq 2$, és legyen $v_1, \ldots, v_n$ egy vektorrendszer. Az alábbi jelöléseket használva

$\oplus$: valamelyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
$\uplus$: mindegyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
$\bullet$: a zérusvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő

igazak-e a tekintett vektorrendszerre vonatkozó alábbi kijelentések?

Ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $\oplus$.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
Ha $\bullet$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
Ha $\uplus$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(7) Legyen $n \geq 2$, és legyen $v_1, \ldots, v_n$ egy vektorrendszer. Az alábbi jelöléseket használva

$\oplus$:	valamelyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
$\uplus$:	mindegyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
$\bullet$:	a zérusvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő

igazak-e a tekintett vektorrendszerre vonatkozó alábbi kijelentések?

Ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $\oplus$.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
Ha $\bullet$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
Ha $\uplus$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg\Big(\Big(\neg\,(A \to B)\Big) \to C\Big)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg\Big(\big(\neg(A \to B)\big) \to C\Big)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!

$\neg$	$\Big(\big(\neg$	$(A$	$\to$	$B)\big)$	$\to$	$C\Big)$
h	h	i	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i	h
h	i	i	h	h	i	i
i	i	i	h	h	h	h
h	h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i	h
h	h	h	i	h	i	i
h	h	h	i	h	i	h

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg\Big(\big(\neg(A \to B)\big) \to C\Big)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!

$\neg$	$(($	$\neg$	$(A$	$\to$	$B))$	$\to$	$C)$
h		*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
h		*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*
h		*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*
i		*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
h		*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
h		*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*
h		*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*
h		*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*

$\Longrightarrow$

Csak 1 darab igaz sor van

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg\Big(\big(\neg(A \to B)\big) \to C\Big)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!

$\neg$	$((\neg$	$(A$	$\to$	$B))$	$\to$	$C)$
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*
i	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*
h	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*

$\Longrightarrow$ Csak 1 darab igaz sor van,

azaz 1 klóz van a TDNF-ban

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg\Big(\big(\neg(A \to B)\big) \to C\Big)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!

$\neg$	$\Big(\big(\neg$	$(A$	$\to$	$B)\big)$	$\to$	$C\Big)$
h	h	i	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i	h
h	i	i	h	h	i	i
i	i	i	h	h	h	h
h	h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i	h
h	h	h	i	h	i	i
h	h	h	i	h	i	h

$\Longrightarrow$ Csak 1 darab igaz sor van, azaz 1 klóz van a TDNF-ban, tehát nincs $\vee$-jel.

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg\Big(\big(\neg\,(A \to B)\big) \to C\Big)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ⊗	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!

$\neg$	$\big((\neg$	$(A$	$\to$	$B))$	$\to$	$C\big)$
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*
i	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*
h	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*

$\Longrightarrow$ Csak 1 darab igaz sor van,

azaz 1 klóz van a TDNF-ban,

tehát nincs $\vee$-jel.

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ○	egyik sem ○	!

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ⊗	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(10) Tekintsük az alábbi formulákat:

$$
\begin{aligned}
F:&\quad (\exists x)(\exists y)\big(D(x,y)\to x=y\big)\\
G:&\quad (\exists x)\neg\Big((\exists y)\big(D(x,y)\to x=y\big)\Big)\\
H:&\quad (\forall x)(\forall y)\big(D(x,y)\wedge\neg(x=y)\big)\\
K:&\quad (\exists x)(\exists y)\big(\neg D(x,y)\to\neg(x=y)\big).
\end{aligned}
$$

A téglalapban felsoroltak közül melyik ekvivalens $\neg F$-fel, azaz az F formula **negáltjával**?

!	G ◯	H ◯	K ◯	egyik sem ◯	!

(10) Tekintsük az alábbi formulákat:

$$\begin{aligned}
F: &\quad (\exists x)(\exists y)\big(D(x,y) \to x = y\big)\\
G: &\quad (\exists x)\neg\Big((\exists y)\big(D(x,y) \to x = y\big)\Big)\\
H: &\quad (\forall x)(\forall y)\big(D(x,y) \wedge \neg(x = y)\big)\\
K: &\quad (\exists x)(\exists y)\big(\neg D(x,y) \to \neg(x = y)\big).
\end{aligned}$$

A téglalapban felsoroltak közül melyik ekvivalens $\neg F$-fel, azaz az F formula **negáltjával**?

!	G ○	H ⊗	K ○	egyik sem ○	!

Tartalom

1. Mátrixszorzás
2. Mátrix inverze
3. Lineáris függetlenség
4. Relációk tulajdonságai
5. Determináns
6. Tautológia (ítéletkalkulus)
7. Determináns és mátrixszorzás (elméleti kérdések)
8. Tautológia (predikátumkalkulus)
9. Leképezések tulajdonságai
10. Számosságok

(1) Melyik az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ○	egyik sem ○	!

(1) Melyik az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{array}{cc|cc} & & -1 & -2 \\ & & -1 & -1 \\ \hline -1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}$$

(1) Melyik az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ○

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ⊗	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{array}{cc|cc} & & -1 & -2 \\ & & -1 & -1 \\ \hline -1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}$$

(2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ○	1 ○	$\frac{1}{4}$ ○	$-\frac{1}{2}$ ○	-1 ○	9 ○

-4 ○	$\frac{3}{2}$ ○	egyik sem ○	!

(2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ○	1 ○	$\frac{1}{4}$ ○	$-\frac{1}{2}$ ○	-1 ○	9 ○

-4 ○	$\frac{3}{2}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ○	1 ○	$\frac{1}{4}$ ○	$-\frac{1}{2}$ ○	-1 ○	9 ○

-4 ○	$\frac{3}{2}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ○	1 ○	$\frac{1}{4}$ ○	$-\frac{1}{2}$ ○	-1 $\otimes$	9 ○

-4 ○	$\frac{3}{2}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$-beli

$$(-1, 2, 1, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	egyik sem ◯	?

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$-beli

$$(-1,2,1,0),\ (0,0,1,1),\ (-1,x,-1,-2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$-beli

$$(-1, 2, 1, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ha $x = 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$-beli

$$(-1, 2, 1, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ha $x = 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha $x \neq 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & c \neq 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & c \neq 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$-beli

$$(-1, 2, 1, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ○	1 ○	2 ⊗	egyik sem ○	?

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ha $x = 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha $x \neq 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & c \neq 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & c \neq 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	tranzitív ◯	antiszimmetrikus ◯	dichotom ◯	egyik sem ◯	?

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	tranzitív ◯	antiszimmetrikus ◯	dichotom ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- Tranzitív, mert $x^2 \leq y^2$-ből és $y^2 \leq z^2$-ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$, mert $x^2 \leq y^2 \leq z^2$.

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	tranzitív ○	antiszimmetrikus ○	dichotom ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

- Tranzitív, mert $x^2 \leq y^2$-ből és $y^2 \leq z^2$-ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$, mert $x^2 \leq y^2 \leq z^2$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(-1, 1) \in \alpha$ és $(1, -1) \in \alpha$, de $1 \neq -1$.

(4) Az $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \le y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	tranzitív ◯	antiszimmetrikus ◯	dichotom ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- Tranzitív, mert $x^2 \le y^2$-ből és $y^2 \le z^2$-ből következik, hogy $x^2 \le z^2$, mert $x^2 \le y^2 \le z^2$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(-1,1) \in \alpha$ és $(1,-1) \in \alpha$, de $1 \ne -1$.
- Dichotom, mert bármely két szám négyzete vagy egyenlő, vagy egyik nagyobb mint a másik.

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	tranzitív $\otimes$	antiszimmetrikus $\bigcirc$	dichotom $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás:

- Tranzitív, mert $x^2 \leq y^2$-ből és $y^2 \leq z^2$-ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$, mert $x^2 \leq y^2 \leq z^2$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(-1, 1) \in \alpha$ és $(1, -1) \in \alpha$, de $1 \neq -1$.
- Dichotom, mert bármely két szám négyzete vagy egyenlő, vagy egyik nagyobb mint a másik.

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6, a 2007 utolsó számjegye 7, a 130 utolsó számjegye pedig 0.) (Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	8 ◯	9 ◯

d nem egész szám ◯	az előzőek egyike sem ◯	?

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6, a 2007 utolsó számjegye 7, a 130 utolsó számjegye pedig 0.) (Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	8 ◯	9 ◯

d nem egész szám ◯	az előzőek egyike sem ◯	?

Megoldás: Vandermonde-determináns:

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6, a 2007 utolsó számjegye 7, a 130 utolsó számjegye pedig 0.) (Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

?	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	8 ◯	9 ◯

d nem egész szám ◯	az előzőek egyike sem ◯	?

Megoldás: Vandermonde-determináns:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} = (3-1)(6-1)(6-3).$$

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6, a 2007 utolsó számjegye 7, a 130 utolsó számjegye pedig 0.) (Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

?	0 ⊗	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	8 ◯	9 ◯

d nem egész szám ◯	az előzőek egyike sem ◯	?

Megoldás: Vandermonde-determináns:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} = (3-1)(6-1)(6-3).$$

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow \big(\neg(A \rightarrow A)\big)$	!	igen ◯	nem ◯	!
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	!	igen ◯	nem ◯	!
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$	!	igen ◯	nem ◯	!

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow \big(\neg(A \rightarrow A)\big)$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow \big(\neg(A \to A)\big)$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow \big(\neg(A \to A)\big)$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$	!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
továbbá $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.	!	igen ◯	nem ◯	!
$BEA = AEB$	!	igen ◯	nem ◯	!
Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.	!	igen ◯	nem ◯	!

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

továbbá $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$BEA = AEB$	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!
Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

Megoldás:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B) \implies 2007 = \det(AB) = \det(A)\det(B) \implies \det(B) \neq 0 \implies B$ invertálható.

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
továbbá $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$BEA = AEB$	!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!
Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

Megoldás:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B) \implies 2007 = \det(AB) = \det(A)\det(B) \implies \det(B) \neq 0 \implies B$ invertálható.
- $BEA = BA$, $AEB = AB$, és mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, így $AB \neq BA$ minden A, B esetén

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, továbbá $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$BEA = AEB$	!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!
Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

Megoldás:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B) \Longrightarrow 2007 = \det(AB) = \det(A)\det(B) \Longrightarrow \det(B) \neq 0 \Longrightarrow B$ invertálható.
- $BEA = BA$, $AEB = AB$, és mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, így $AB \neq BA$ minden A, B esetén
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) \Longrightarrow 1 = \det(AB) = \det(A)\det(B) \Longrightarrow \det(A) \neq 0 \Longrightarrow B$ invertálható.

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$\Big((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y)\Big) \rightarrow (\exists x)\Big(B(x) \wedge C(x)\Big)$	!	igen ◯	nem ◯	!
$\neg(\forall x)(\exists y)B(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(y,x))$	!	igen ◯	nem ◯	!
$(\exists x)(\forall y)B(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)B(y,x)$	!	igen ◯	nem ◯	!

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$\Big((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y)\Big) \rightarrow (\exists x)\Big(B(x) \wedge C(x)\Big)$	!	igen ○	nem ⊗	!
$\neg(\forall x)(\exists y)B(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(y,x))$	!	igen ○	nem ○	!
$(\exists x)(\forall y)B(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)B(y,x)$	!	igen ○	nem ○	!

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

Formula	!	igen	nem	!
$\Big((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y)\Big) \to (\exists x)\Big(B(x) \wedge C(x)\Big)$	!	igen ○	nem ⊗	!
$\neg(\forall x)(\exists y)B(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(y,x))$	!	igen ⊗	nem ○	!
$(\exists x)(\forall y)B(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)B(y,x)$	!	igen ○	nem ○	!

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

Formula					
$\Big((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y)\Big) \to (\exists x)\Big(B(x) \wedge C(x)\Big)$	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigotimes$	!
$\neg(\forall x)(\exists y)B(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(y,x))$	!	igen $\bigotimes$	nem $\bigcirc$	!
$(\exists x)(\forall y)B(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)B(y,x)$	!	igen $\bigotimes$	nem $\bigcirc$	!

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \to A,\ (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \to A^2,\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ○	g szürjektív ○	g injektív ○	egyik sem ○	?

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \to A,\ (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \to A^2,\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ○	g szürjektív ○	g injektív ○	egyik sem ○	?

Megoldás:
$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \to A,\ (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \to A^2,\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:
$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$
$\beta = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \to A,\ (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \to A^2,\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:
$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$
$\beta = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

$$\begin{array}{c} f \\ (-1,1) \mapsto 1 \\ (1,-1) \mapsto -1 \\ (0,0) \mapsto 0 \end{array}$$

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \to A,\ (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \to A^2,\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:
$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$
$\beta = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

$$\begin{array}{c} f \\ (-1,1) \mapsto 1 \\ (1,-1) \mapsto -1 \\ (0,0) \mapsto 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} g \\ (-1,-1) \mapsto (-1,-1) \\ (-1,0) \mapsto (0,-1) \\ (-1,1) \mapsto (1,-1) \\ (0,0) \mapsto (0,0) \\ (0,1) \mapsto (1,0) \\ (1,1) \mapsto (1,1) \end{array}$$

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \to A,\ (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \to A^2,\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív $\otimes$	g szürjektív $\bigcirc$	g injektív $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás:
$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$
$\beta = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

$$\begin{array}{c} f \\ (-1,1) \mapsto 1 \\ (1,-1) \mapsto -1 \\ (0,0) \mapsto 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} g \\ (-1,-1) \mapsto (-1,-1) \\ (-1,0) \mapsto (0,-1) \\ (-1,1) \mapsto (1,-1) \\ (0,0) \mapsto (0,0) \\ (0,1) \mapsto (1,0) \\ (1,1) \mapsto (1,1) \end{array}$$

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A ○	$\mathbb{R}$ ○	$A \times \mathbb{Z}$ ○	$\mathbb{N}$ ○	egyik sem ○	?

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A ○	$\mathbb{R}$ ○	$A \times \mathbb{Z}$ ○	$\mathbb{N}$ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $\left|\mathbb{Q}^2\right| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A ◯	$\mathbb{R}$ ◯	$A \times \mathbb{Z}$ ◯	$\mathbb{N}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $\left|\mathbb{Q}^2\right| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}| = c$

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A ◯	$\mathbb{R}$ ◯	$A \times \mathbb{Z}$ ◯	$\mathbb{N}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $\left|\mathbb{Q}^2\right| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}| = c$
- $|A \times \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A ◯	$\mathbb{R}$ ◯	$A \times \mathbb{Z}$ ◯	$\mathbb{N}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $\left|\mathbb{Q}^2\right| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}| = c$
- $|A \times \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A $\otimes$	$\mathbb{R}$ $\bigcirc$	$A \times \mathbb{Z}$ $\otimes$	$\mathbb{N}$ $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $\left|\mathbb{Q}^2\right| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}| = c$
- $|A \times \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Tartalom

1. Polinomosztás
2. Relációtulajdonságok
3. Leképezéstulajdonságok
4. Osztályozás
5. Tautológia
6. Sajátérték
7. Mátrixműveletek, determináns
8. Altér
9. Lineáris függetlenség
10. Mátrix inverze

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ◯	-3 ◯	0 ◯	2 ◯	1 ◯	4 ◯

!	$x - 2$ ◯	$x^2 - 4x + 4$ ◯	egyik sem ◯	!

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ○	-3 ○	0 ○	2 ○	1 ○	4 ○

!	$x - 2$ ○	$x^2 - 4x + 4$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ○	-3 ○	0 ○	2 ○	1 ○	4 ○

!	$x - 2$ ○	$x^2 - 4x + 4$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$x^3 \quad -3x^2 \quad +5x \quad -5 \quad : (x-1) =$$

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ◯	-3 ◯	0 ◯	2 ◯	1 ◯	4 ◯

!	$x-2$ ◯	x^2-4x+4 ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás:

$$\begin{array}{rrrrl} x^3 & -3x^2 & +5x & -5 & : (x-1) = x^2 \\ x^3 & -x^2 & & & \\ \hline & -2x^2 & +5x & -5 & \end{array}$$

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ○	-3 ○	0 ○	2 ○	1 ○	4 ○

!	$x - 2$ ○	$x^2 - 4x + 4$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -3x^2 & +5x & -5 & : (x-1) = x^2 - 2x \\
x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^2 & +5x & -5 & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x & -5 &
\end{array}$$

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ○	-3 ○	0 ○	2 ○	1 ○	4 ○

!	$x-2$ ○	x^2-4x+4 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -3x^2 & +5x & -5 & :(x-1) = x^2 - 2x + 3 \\
x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^2 & +5x & -5 & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x & -5 & \\
 & & 3x & -3 & \\
\cline{3-4}
 & & & -2 &
\end{array}
$$

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ○	-3 ○	0 ○	2 ○	1 ○	4 ○

!	$x-2$ ○	x^2-4x+4 ○	egyik sem ⊗	!

Megoldás:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -3x^2 & +5x & -5 & :(x-1) = x^2 - 2x + 3 \\
x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^2 & +5x & -5 & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\
\hline
 & & 3x & -5 & \\
 & & 3x & -3 & \\
\hline
 & & & -2 &
\end{array}
$$

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	részbenrendezés ◯

tranzitív ◯	egyik sem ◯	?

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	részbenrendezés ◯

tranzitív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	részbenrendezés ◯

tranzitív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.
- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \rho$.

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	részbenrendezés ◯

tranzitív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.
- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mert nem reflexív.

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	részbenrendezés ◯

tranzitív ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.
- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mert nem reflexív.
- Nem tranzitív, mert $(1, 2010) \in \rho$ és $(2010, 4019) \in \rho$, de $(1, 4019) \notin \rho$.

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus $\otimes$	reflexív $\bigcirc$	részbenrendezés $\bigcirc$

tranzitív $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.
- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mert nem reflexív.
- Nem tranzitív, mert $(1, 2010) \in \rho$ és $(2010, 4019) \in \rho$, de $(1, 4019) \notin \rho$.

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2,\ x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	?

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	?

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	?

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$-nek nincs őse

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ (x,y) \mapsto x+y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2,\ x \mapsto (x-1, x+1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	?

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2,2)f = (1,3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5,7)$-nek nincs őse
- g injektív, mert

$$xg = yg$$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2,\ x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	?

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$-nek nincs őse
- g injektív, mert

$$\begin{aligned} xg &= yg \\ (x-1, x+1) &= (y-1, y+1) \end{aligned}$$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	?

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$-nek nincs őse
- g injektív, mert

$$\begin{aligned} xg &= yg \\ (x-1, x+1) &= (y-1, y+1) \\ x-1 = y-1 \quad &\text{és} \quad x+1 = y+1 \end{aligned}$$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2,\ x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	?

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2,2)f = (1,3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5,7)$-nek nincs őse
- g injektív, mert

$$\begin{array}{rcl} xg & = & yg \\ (x-1, x+1) & = & (y-1, y+1) \\ x-1 = y-1 & \text{és} & x+1 = y+1 \\ x = y & \text{és} & x = y \end{array}$$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2,\ x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ○	g szürjektív ○	g injektív ⊗	?

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$-nek nincs őse
- g injektív, mert

$$\begin{aligned}
xg &= yg \\
(x-1, x+1) &= (y-1, y+1) \\
x - 1 = y - 1 \quad &\text{és} \quad x + 1 = y + 1 \\
x = y \quad &\text{és} \quad x = y
\end{aligned}$$

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$ ◯	$\mathcal{D}$ ◯	$\mathcal{E}$ ◯	?

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$ ◯	$\mathcal{D}$ ◯	$\mathcal{E}$ ◯	?

Megoldás

- $\mathcal{C}$ osztályozás

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$ ◯	$\mathcal{D}$ ◯	$\mathcal{E}$ ◯	?

Megoldás

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás, mert a 2-es két blokkban is szerepel

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$ ◯	$\mathcal{D}$ ◯	$\mathcal{E}$ ◯	?

Megoldás

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás, mert a 2-es két blokkban is szerepel
- $\mathcal{E}$ nem osztályozás, mert egyik blokkban sincs benne a 2-es

(4) Legyen $A = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0,2,3\},\{1,2,3\},\{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset),\{1\},\{3,4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$ $\otimes$	$\mathcal{D}$ $\bigcirc$	$\mathcal{E}$ $\bigcirc$	?

Megoldás

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás, mert a 2-es két blokkban is szerepel
- $\mathcal{E}$ nem osztályozás, mert egyik blokkban sincs benne a 2-es

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\Big(\neg(\exists x)(\exists y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big)\Big) \leftrightarrow \Big((\forall x)(\forall y)\big(A(x) \wedge B(y)\big)\Big)$$

!	igen ○	nem ○	!

$$\big((A \vee B) \to C\big) \leftrightarrow \big((A \to C) \vee (B \to C)\big)$$

!	igen ○	nem ○	!

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\Big(\neg(\exists x)(\exists y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big)\Big) \leftrightarrow \Big(\big((\forall x)(\forall y)\big(A(x) \wedge B(y)\big)\big)\Big)$$

!	igen ⊗	nem ○	!

$$\big((A \vee B) \rightarrow C\big) \leftrightarrow \big((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)\big)$$

!	igen ○	nem ○	!

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\Big(\neg(\exists x)(\exists y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big)\Big) \leftrightarrow \Big((\forall x)(\forall y)\big(A(x) \wedge B(y)\big)\Big)$$

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

$$\big((A \vee B) \to C\big) \leftrightarrow \big((A \to C) \vee (B \to C)\big)$$

!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○

egyik sem ○	?

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○

egyik sem ○	?

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix}$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○

egyik sem ○	?

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ◯	-2 ◯	0 ◯	1 ◯	-1 ◯	2 ◯	7 ◯	$\sqrt{17}$ ◯

egyik sem ◯	?

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○

egyik sem ○	?

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x = x(x-7)$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○

egyik sem ○	?

Megoldás

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} &= (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x = x(x-7) \\ x(x-7) &= 0 \end{aligned}$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○

egyik sem ○	?

Megoldás

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} &= (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x = x(x-7) \\ x(x-7) &= 0 \\ x = 0 & \qquad x = 7 \end{aligned}$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ⊗	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ⊗	$\sqrt{17}$ ○

egyik sem ○	?

Megoldás

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} &= (1-x)(6-x) - 2\cdot 3 = x^2 - 7x = x(x-7) \\ x(x-7) &= 0 \\ x = 0 \quad & \quad x = 7 \end{aligned}$$

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ◯	5 ◯	7 ◯	1 ◯	4 ◯	0 ◯	-5 ◯	más számérték ◯

egyik sem ◯	!

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ◯	5 ◯	7 ◯	1 ◯	4 ◯	0 ◯	-5 ◯	más számérték ◯

egyik sem ◯	!

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ◯	5 ◯	7 ◯	1 ◯	4 ◯	0 ◯	-5 ◯	más számérték ◯

egyik sem ◯	!

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array} \Longrightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ◯	5 ◯	7 ◯	1 ◯	4 ◯	0 ◯	-5 ◯	más számérték ◯

egyik sem ◯	!

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array} \Longrightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A \cdot A^T) = 0$$

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ◯	5 ◯	7 ◯	1 ◯	4 ◯	0 ⊗	−5 ◯	más számérték ◯

egyik sem ◯	!

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array} \Longrightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A \cdot A^T) = 0$$

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$	!	igen ○	nem ○	!
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$	!	igen ○	nem ○	!
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$	!	igen ○	nem ○	!

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$	!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$	!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$	!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ◯	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ◯	$\vec{a}, \vec{b}$ ◯	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ ◯	egyik sem ◯	?

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ◯	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ◯	$\vec{a}, \vec{b}$ ◯	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ◯	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ◯	$\vec{a}, \vec{b}$ ◯	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ független

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ◯	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ◯	$\vec{a}, \vec{b}$ ◯	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ független
- $\vec{a}, \vec{b}$ független

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ◯	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ◯	$\vec{a}, \vec{b}$ ◯	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ független
- $\vec{a}, \vec{b}$ független
- $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ függő, mert benne van a nullvektor

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\otimes$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ $\bigcirc$	$\vec{a}, \vec{b}$ $\bigcirc$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ független
- $\vec{a}, \vec{b}$ független
- $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ függő, mert benne van a nullvektor

(10) Számolja ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix **inverzét**, majd jelölje be, hogy a felsorolt elemek közül melyek szerepelnek (egyszer vagy többször) a kiszámolt A^{-1} mátrixban.

?	-11 ◯	-8 ◯	-7 ◯	0 ◯	3 ◯	5 ◯	8 ◯

10 ◯	egyik sem ◯	?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(6)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{(7)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 9 & -20 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{(8)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 & -11 \end{array}\right] \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ 4 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T} = \clubsuit$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T} = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T} = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T} = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$\clubsuit = \frac{1}{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T} = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$\clubsuit = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 9 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}^{T}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$\clubsuit = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 9 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ 4 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

(10) Számolja ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix **inverzét**, majd jelölje be, hogy a felsorolt elemek közül melyek szerepelnek (egyszer vagy többször) a kiszámolt A^{-1} mátrixban.

?	-11 ⊗	-8 ○	-7 ○	0 ○	3 ○	5 ⊗	8 ○

10 ○	egyik sem ○	?

Tartalom

1. Halmazműveleti tulajdonságok (elmélet)
2. Leképezések tulajdonságai
3. Osztályozás
4. Relációk tulajdonságai
5. Számosságok
6. Teljes diszjunktív normálforma
7. Negáció (predikátumkalkulus)
8. Lineáris függetlenség (gyakorlat)
9. Lineáris függetlenség (elmélet)
10. Mátrix inverze

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$A \times \overline{A} = \emptyset$	!	igen ◯	nem ◯	!
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	!	igen ◯	nem ◯	!
$A \triangle A = A$	!	igen ◯	nem ◯	!

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$A \times \overline{A} = \emptyset$	!	igen ◯	nem ◯	!
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	!	igen ◯	nem ◯	!
$A \triangle A = A$	!	igen ◯	nem ◯	!

Megoldás:

- Hamis: $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}$, $A \times \overline{A} = \{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\} \neq \emptyset$.

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$A \times \overline{A} = \emptyset$	!	igen ○	nem ○	!
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	!	igen ○	nem ○	!
$A \triangle A = A$	!	igen ○	nem ○	!

Megoldás:

- Hamis: $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}$, $A \times \overline{A} = \{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\} \neq \emptyset$.
- Igaz, a $\cap$ disztributív az $\cup$-ra nézve.

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$A \times \overline{A} = \emptyset$	!	igen ◯	nem ◯	!
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	!	igen ◯	nem ◯	!
$A \triangle A = A$	!	igen ◯	nem ◯	!

Megoldás:

- Hamis: $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}$, $A \times \overline{A} = \{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\} \neq \emptyset$.
- Igaz, a $\cap$ disztributív az $\cup$-ra nézve.
- Hamis: $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$A \times \overline{A} = \emptyset$	!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
$A \triangle A = A$	!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!

Megoldás:

- Hamis: $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}$, $A \times \overline{A} = \{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\} \neq \emptyset$.
- Igaz, a $\cap$ disztributív az $\cup$-ra nézve.
- Hamis: $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x,y) \mapsto (y,x), \qquad \beta : A \to A,\ (x,y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbb{Z},\ (x,y) \mapsto x+y, \qquad \delta : \mathbb{Z} \to A,\ x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	α ◯	β ◯	γ ◯	δ ◯	egyik sem ◯	?

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x, y) \mapsto (y, x), \qquad \beta : A \to A,\ (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y, \qquad \delta : \mathbb{Z} \to A,\ x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	α ○	β ○	γ ○	δ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

$$\begin{aligned}
(x, y)\alpha &= (u, v)\alpha \\
(y, x) &= (v, u) \\
y = v \quad &\text{és} \quad x = u \\
(x, y) &= (u, v)
\end{aligned}$$

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x, y) \mapsto (y, x), \qquad \beta : A \to A,\ (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y, \qquad \delta : \mathbb{Z} \to A,\ x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	α ○	β ○	γ ○	δ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

$$\begin{aligned} (x, y)\alpha &= (u, v)\alpha \\ (y, x) &= (v, u) \\ y = v \quad &\text{és} \quad x = u \\ (x, y) &= (u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y)\beta &= (u, v)\beta \\ (x^3, -y) &= (u^3, -v) \\ x^3 = u^3 \quad &= \quad -y = -v \\ x = u \quad &\text{és} \quad y = v \\ (x, y) &= (u, v) \end{aligned}$$

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x, y) \mapsto (y, x), \qquad \beta : A \to A,\ (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y, \qquad \delta : \mathbb{Z} \to A,\ x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	α ◯	β ◯	γ ◯	δ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

$$\begin{aligned} (x, y)\alpha &= (u, v)\alpha \\ (y, x) &= (v, u) \\ y = v \quad &\text{és} \quad x = u \\ (x, y) &= (u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y)\beta &= (u, v)\beta \\ (x^3, -y) &= (u^3, -v) \\ x^3 = u^3 \quad &= \quad -y = -v \\ x = u \quad &\text{és} \quad y = v \\ (x, y) &= (u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\delta &= y\delta \\ (x, -x) &= (y, -y) \\ x = y \quad &\text{és} \quad -x = -y \\ x &= y \end{aligned}$$

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x, y) \mapsto (y, x), \qquad \beta : A \to A,\ (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y, \qquad \delta : \mathbb{Z} \to A,\ x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	α ○	β ○	γ ○	δ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

$$\begin{array}{rcl} (x,y)\alpha & = & (u,v)\alpha \\ (y,x) & = & (v,u) \\ y = v & \text{és} & x = u \\ (x,y) & = & (u,v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (x,y)\beta & = & (u,v)\beta \\ (x^3,-y) & = & (u^3,-v) \\ x^3 = u^3 & = & -y = -v \\ x = u & \text{és} & y = v \\ (x,y) & = & (u,v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x\delta & = & y\delta \\ (x,-x) & = & (y,-y) \\ x = y & \text{és} & -x = -y \\ x & = & y \end{array}$$

A γ reláció nem injektív, mert $(1,3)\gamma = (2,2)\gamma = 4$.

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x, y) \mapsto (y, x), \qquad \beta : A \to A,\ (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y, \qquad \delta : \mathbb{Z} \to A,\ x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	α $\otimes$	β $\otimes$	γ $\bigcirc$	δ $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás:

$$\begin{array}{rcl} (x,y)\alpha & = & (u,v)\alpha \\ (y,x) & = & (v,u) \\ y = v & \text{és} & x = u \\ (x,y) & = & (u,v) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (x,y)\beta & = & (u,v)\beta \\ (x^3,-y) & = & (u^3,-v) \\ x^3 = u^3 & = & -y = -v \\ x = u & \text{és} & y = v \\ (x,y) & = & (u,v) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x\delta & = & y\delta \\ (x,-x) & = & (y,-y) \\ x = y & \text{és} & -x = -y \\ x & = & y \end{array}$$

A γ reláció nem injektív, mert $(1,3)\gamma = (2,2)\gamma = 4$.

(3) Legyen $\mathcal{C} = \{\{1,5,6\},\{0,4\},X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ halmazon?

!	$\emptyset$ ○	$\{2\}$ ○	$\{\emptyset,3\}$ ○	$\{2,3\}$ ○	$\{3,4,5\}$ ○	egyik sem ○	!

(3) Legyen $\mathcal{C} = \{\{1, 5, 6\}, \{0, 4\}, X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon?

!	$\emptyset$ ◯	$\{2\}$ ◯	$\{\emptyset, 3\}$ ◯	$\{2, 3\}$ ◯	$\{3, 4, 5\}$ ◯	egyik sem ◯	!

Megoldás: Mitől lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

1. $\mathcal{C}$ olyan halmaz, mely $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ részhalmazait tartalmazza,
2. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ összes elemének szerepelnie kell $\mathcal{C}$ valamelyik elemében,
3. az előbbi pontnál minden elem, csak egyszer szerepelhet,
4. és $\mathcal{C}$ nem tartalmazza az üres halmazt.

(3) Legyen $\mathcal{C} = \{\{1,5,6\},\{0,4\},X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ halmazon?

!	$\emptyset$ ○	$\{2\}$ ○	$\{\emptyset,3\}$ ○	$\{2,3\}$ ⊗	$\{3,4,5\}$ ○	egyik sem ○	!

Megoldás: Mitől lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

1. $\mathcal{C}$ olyan halmaz, mely $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ részhalmazait tartalmazza,
2. $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ összes elemének szerepelnie kell $\mathcal{C}$ valamelyik elemében,
3. az előbbi pontnál minden elem, csak egyszer szerepelhet,
4. és $\mathcal{C}$ nem tartalmazza az üres halmazt.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : \; x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon	!	igen ◯	nem ◯	!
$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon	!	igen ◯	nem ◯	!
$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon	!	igen ◯	nem ◯	!

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : \ x_1 + y_1 \le x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : \; x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.
- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $(1, -1)$ és $(-1, 1)$ is eleme a relációnak, de $1 \neq -1$.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : \ x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.
- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $(1, -1)$ és $(-1, 1)$ is eleme a relációnak, de $1 \neq -1$.
- Igaz.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : \ x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

$\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

$\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ◯	nem ◯	!

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1,3),(2,2))$ és $((2,2),(1,3))$ is eleme a relációnak, de $(1,3) \neq (2,2)$.
- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $(1,-1)$ és $(-1,1)$ is eleme a relációnak, de $1 \neq -1$.
- Igaz.
  - Reflexív: $\forall x \in \mathbb{Z}$-re $x^3 = x^3$.
  - Tranzitív: ha $x^3 = y^3$ és $y^3 = z^3$, akkor $x^3 = z^3$.
  - Antiszimmetrikus: nincs két különböző x, y, melyekre $x^3 = y^3$.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : \; x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ○	nem ⊗	!

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ○	nem ⊗	!

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ⊗	nem ○	!

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.
- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $(1, -1)$ és $(-1, 1)$ is eleme a relációnak, de $1 \neq -1$.
- Igaz.
  - Reflexív: $\forall x \in \mathbb{Z}$-re $x^3 = x^3$.
  - Tranzitív: ha $x^3 = y^3$ és $y^3 = z^3$, akkor $x^3 = z^3$.
  - Antiszimmetrikus: nincs két különböző x, y, melyekre $x^3 = y^3$.

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ◯	$S \times \mathbb{N}$ ◯	$S \cup \mathbb{Z}$ ◯	$\mathbb{R}$ ◯	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ◯	egyik sem ◯	?

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ○	$S \times \mathbb{N}$ ○	$S \cup \mathbb{Z}$ ○	$\mathbb{R}$ ○	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

1. $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen nem lehet)

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ○	$S \times \mathbb{N}$ ○	$S \cup \mathbb{Z}$ ○	$\mathbb{R}$ ○	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

1. $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen nem lehet)
2. $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$

(5) Legyen $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ◯	$S \times \mathbb{N}$ ◯	$S \cup \mathbb{Z}$ ◯	$\mathbb{R}$ ◯	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

1. $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen nem lehet)
2. $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
3. $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ◯	$S \times \mathbb{N}$ ◯	$S \cup \mathbb{Z}$ ◯	$\mathbb{R}$ ◯	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ◯	egyik sem ◯	?

Megoldás:

1. $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen nem lehet)
2. $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
3. $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
4. $|\mathbb{R}| = c$

(5) Legyen $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ○	$S \times \mathbb{N}$ ○	$S \cup \mathbb{Z}$ ○	$\mathbb{R}$ ○	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

1. $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen nem lehet)
2. $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
3. $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
4. $|\mathbb{R}| = c$
5. $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$

(5) Legyen $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ○	$S \times \mathbb{N}$ ○	$S \cup \mathbb{Z}$ ○	$\mathbb{R}$ ○	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

1. $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen nem lehet)
2. $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
3. $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
4. $|\mathbb{R}| = c$
5. $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$
   $c = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}|, \aleph_0)$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ○	$S \times \mathbb{N}$ ○	$S \cup \mathbb{Z}$ ○	$\mathbb{R}$ ○	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ○	egyik sem ○	?

Megoldás:

1. $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen nem lehet)
2. $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
3. $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
4. $|\mathbb{R}| = c$
5. $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$
   $c = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}|, \aleph_0)$
   $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = c$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S $\otimes$	$S \times \mathbb{N}$ $\otimes$	$S \cup \mathbb{Z}$ $\otimes$	$\mathbb{R}$ $\bigcirc$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás:

1. $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen nem lehet)
2. $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
3. $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
4. $|\mathbb{R}| = c$
5. $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$
   $c = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}|, \aleph_0)$
   $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = c$

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯	6 ◯	7 ◯	8 ◯	!

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \to (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯	6 ◯	7 ◯	8 ◯	!

Megoldás:

A	$\to$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \to (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	8 ○	!

Megoldás:

A	$\to$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

$\Longrightarrow$ 6 igaz kiértékelés

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \to (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯	6 ◯	7 ◯	8 ◯	!

Megoldás:

A	$\to$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

$\Longrightarrow$ 6 igaz kiértékelés $\Longrightarrow$ 6 klóz

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \to (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ⊗	6 ○	7 ○	8 ○	!

Megoldás:

A	$\to$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

$\Longrightarrow$ 6 igaz kiértékelés $\Longrightarrow$ 6 klóz $\Longrightarrow$ 5 $\vee$-jel

(7) Melyik a $(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F \quad : \quad (\forall x)\Big((\forall z)A(x,z) \to (\forall y)B(y)$$

$$G \quad : \quad (\exists x)\Big((\forall y)(\neg B(y)) \to (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)$$

$$H \quad : \quad (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)$$

!	F ◯	G ◯	H ◯	egyik sem ◯	!

(7) Melyik a $(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : \quad (\forall x)\Big((\forall z)A(x,z) \to (\forall y)B(y)\Big)$$
$$G : \quad (\exists x)\Big((\forall y)(\neg B(y)) \to (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)$$
$$H : \quad (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)$$

!	F ○	G ○	H ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\neg(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$$

(7) Melyik a $(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : \quad (\forall x)\Big((\forall z)A(x,z) \to (\forall y)B(y)\Big)$$
$$G : \quad (\exists x)\Big((\forall y)(\neg B(y)) \to (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)$$
$$H : \quad (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)$$

!	F ○	G ○	H ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\neg(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big) \quad \equiv \quad (\exists x)\neg\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$$

(7) Melyik a $(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : \quad (\forall x)\Big((\forall z)A(x,z) \to (\forall y)B(y)\Big)$$

$$G : \quad (\exists x)\Big((\forall y)(\neg B(y)) \to (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)$$

$$H : \quad (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)$$

!	F ○	G ○	H ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\neg(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big) \equiv (\exists x)\neg\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$$

$$\equiv (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge \neg(\forall z)A(x,z)\Big)$$

(7) Melyik a $(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$
\begin{aligned}
F &: \quad (\forall x)\Big((\forall z)A(x,z) \to (\forall y)B(y)\Big)\\
G &: \quad (\exists x)\Big((\forall y)(\neg B(y)) \to (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)\\
H &: \quad (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x,z))\Big)
\end{aligned}
$$

!	F ○	G ○	H ⊗	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big) &\equiv (\exists x)\neg\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)\\
&\equiv (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge \neg(\forall z)A(x,z)\Big)\\
&\equiv (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)\neg A(x,z)\Big)
\end{aligned}
$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ○	1 ○	3 ○	5 ○	7 ○	-1 ○	-3 ○	-5 ○	egyéb ○	!

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ◯	1 ◯	3 ◯	5 ◯	7 ◯	-1 ◯	-3 ◯	-5 ◯	egyéb ◯	!

Megoldás: rangszámítás uganúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ○	1 ○	3 ○	5 ○	7 ○	-1 ○	-3 ○	-5 ○	egyéb ○	!

Megoldás: rangszámítás uganúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ◯	1 ◯	3 ◯	5 ◯	7 ◯	-1 ◯	-3 ◯	-5 ◯	egyéb ◯	!

Megoldás: rangszámítás uganúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ◯	1 ◯	3 ◯	5 ◯	7 ◯	-1 ◯	-3 ◯	-5 ◯	egyéb ◯	!

Megoldás: rangszámítás uganúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{pmatrix}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ◯	1 ◯	3 ◯	5 ◯	7 ◯	−1 ◯	−3 ◯	−5 ◯	egyéb ◯	!

Megoldás: rangszámítás uganúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&t\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\2&1&t\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&-1&t-4\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&t-5\end{pmatrix}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ○	1 ○	3 ○	5 ○	7 ○	−1 ○	−3 ○	−5 ○	egyéb ○	!

Megoldás: rangszámítás uganúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & t\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & t\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & t-4\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & t-5\end{pmatrix}$$

Akkor lesz lin. függő a vektorrendszer, ha lesz legalább egy csupa 0-sor.

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ○	1 ○	3 ○	5 ○	7 ○	−1 ○	−3 ○	−5 ○	egyéb ○	!

Megoldás: rangszámítás uganúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$$

Akkor lesz lin. függő a vektorrendszer, ha lesz legalább egy csupa 0-sor.
Azaz, akkor lesz lin. függő, ha $t = 5$.

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ◯	1 ◯	3 ◯	5 ⊗	7 ◯	−1 ◯	−3 ◯	−5 ◯	egyéb ◯	!

Megoldás: rangszámítás uganúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & t\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & t\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & t-4\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & t-5\end{pmatrix}$$

Akkor lesz lin. függő a vektorrendszer, ha lesz legalább egy csupa 0-sor.
Azaz, akkor lesz lin. függő, ha $t = 5$.

(9) Legyen v_1, v_2, v_3 egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a "lin." a "lineárisan" rövidítése)?

Ha v_1, v_2, v_3 lin. független, akkor $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

!	igen ◯	nem ◯	!

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

!	igen ◯	nem ◯	!

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor v_3, v_2, v_1 is lin. függő.

!	igen ◯	nem ◯	!

(9) Legyen v_1, v_2, v_3 egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a "lin." a "lineárisan" rövidítése)?

Ha v_1, v_2, v_3 lin. független, akkor $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.	!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor v_3, v_2, v_1 is lin. függő.	!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

Megoldás:

- Igaz: a lin. függetlenség definíciójából jön.

(9) Legyen v_1, v_2, v_3 egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a "lin." a "lineárisan" rövidítése)?

Ha v_1, v_2, v_3 lin. független, akkor $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor v_3, v_2, v_1 is lin. függő.

!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

Megoldás:

- Igaz: a lin. függetlenség definíciójából jön.
- Hamis: például a $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ vektorrendszer függő, de a v_3-at nem tudjuk a v_1 és v_2 lineáris kombinációjaként felírni.

(9) Legyen v_1, v_2, v_3 egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a "lin." a "lineárisan" rövidítése)?

Ha v_1, v_2, v_3 lin. független, akkor $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor v_3, v_2, v_1 is lin. függő.

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!

Megoldás:

- Igaz: a lin. függetlenség definíciójából jön.
- Hamis: például a $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ vektorrendszer függő, de a v_3-at nem tudjuk a v_1 és v_2 lineáris kombinációjaként felírni.
- Igaz: vektorrendszerben a vektorok sorrendje nem számít.

(10) Legyen $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Melyik a C^{-1} mátrix legnagyobb abszulútértékű eleme.

!	-2 ○	1 ○	2 ○	3 ○	-12 ○	-7 ○	-4 ○

$-\frac{17}{2}$ ○	egyéb ○	!

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(6)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(6)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(7)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(6)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(7)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{(8)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(6)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(7)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{(8)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{-7} & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(10) Legyen $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Melyik a C^{-1} mátrix legnagyobb abszulútértékű eleme.

!	-2 ○	1 ○	2 ○	3 ○	-12 ○	-7 ⊗	-4 ○

$-\frac{17}{2}$ ○	egyéb ○	!

1. kérdés

(1) Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(4-2i)z = 2+14i$?
(*Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.*)

!	-3 ○	-2 ○	-1 ○	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	egyik sem ○	!

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

1. feladat

Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(4-2i)\,z = 2+14i$?
(*Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.*)

1. kérdés

1. feladat

Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(4-2i)\,z = 2+14i$?
(*Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.*)

Hint

Meg kell oldani a

$$(4-2i)\,z = 2+14i$$

egyenletet a komplex számok körében, ahol z az ismeretlen!

Megoldás:

$$z = \frac{2+14i}{4-2i}\cdot\frac{4+2i}{4+2i} = \frac{-20+60i}{20} = -1+3i$$

2. kérdés

(2) Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.	!	igen ◯	nem ◯	!
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.	!	igen ◯	nem ◯	!
$A \cup (B \cap A) = A$.	!	igen ◯	nem ◯	!

2. feladat

Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

- Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cup (B \cap A) = A$.

2. kérdés

2. feladat

Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

- Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cup (B \cap A) = A$.

Hint

Mivel a vizsga tesztes, rajzolgatni is lehet.

Megoldás:

- Igaz. (Kijön a definícióból.)
- Igaz. (Az unió disztributív a metszetre nézve.)
- Igaz. (Elnyelési tulajdonság.)

3. kérdés

(3) Legyen $A = P(\mathbf{N})$ az $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \{(X, Y) \in A^2 : X \cap Y$ véges$\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus ◯	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	egyik sem ◯	?

3. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \left\{\left(X, Y \in A^2 : X \cap Y \text{ véges}\right)\right\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	egyik sem	?

3. kérdés

3. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \left\{ \left(X, Y \in A^2 : X \cap Y \text{ véges} \right) \right\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	egyik sem	?

Hint

Ne essünk azonnal teljesen kétségbe.

Megoldás:

- Szimmetrikus. Triviális. (Metszetben nem számít a sorrend.)
- Nem antiszimmetrikus. (Az előző miatt már ez is triviális.)
- Nem reflexív. Ez már nem feltétlen triviális. Ellenpélda: $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ viszont $(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \notin \rho$, mert $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}$ nem véges.

4. kérdés

(4) Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-3 ○	-2 ○	0 ○	2 ○	1 ○	3 ○	$x-3$ ○	x^2+1 ○	egyik sem ○	!

4. feladat

Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

Hint

Polinomosztás.

Megoldás:

$$x^3 + x^2 - 2x + 10 = (x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 4) - 2$$

5. kérdés

(5) Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél" ítéletet formalizálja. Az alábbi

$$U: \quad (\forall x)(\exists y)\big(\neg A(x) \wedge F(y) \wedge P\big),$$
$$V: \quad \big(P \wedge (\forall x)A(x)\big) \to \big((\forall y)\neg F(y)\big),$$
$$W: \quad \big(P \wedge (\forall x)(\exists y)\big)\Big(A(x) \vee F(y)\Big).$$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F-vel ekvivalens formula?

!	U ○	V ○	W ○	egyik sem ○	!

5. feladat

Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél" ítéletet formalizálja. Az alábbi

- $U: (\forall x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge F(x) \wedge P)$
- $V: (P \wedge (\forall x) A(x)) \to ((\forall y) \neg F(y))$
- $W: (P \wedge (\forall x)(\exists y))(A(x) \vee F(y))$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F-vel ekvivalens formula?

5. kérdés

5. feladat

Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél'' ítéletet formalizálja. Az alábbi

- $U : (\forall x)\,(\forall y)\,(\neg A(x) \wedge F(x) \wedge P)$
- $V : (P \wedge (\forall x)\,A(x)) \rightarrow ((\forall y)\,\neg F(y))$
- $W : (P \wedge (\forall x)\,(\exists y))\,(A(x) \vee F(y))$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F-vel ekvivalens formula?

Megoldás:

Egyértelmű, hogy a V formulát keressük. Az első mást jelent, az utolsó szintaktikailag nem is (jó) formula.

6. kérdés

(6) Igazak-e az alábbi kijelentések?

Létezik $\mathbf{N} \to \mathbf{N}^3$ bijektív leképezés.	igen ○	nem ○
Létezik $\mathbf{Q}^7 \to \mathbf{R}$ bijektív leképezés.	igen ○	nem ○
Létezik $\mathbf{R} \to \mathbf{N}^2$ bijektív leképezés.	igen ○	nem ○

6. feladat

Igazak-e az alábbi kijelentések?

- Létezik $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{Q}^7 \to \mathbb{R}$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{N}^2$ bijektív leképezés.

6. kérdés

6. feladat

Igazak-e az alábbi kijelentések?

- Létezik $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{Q}^7 \to \mathbb{R}$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{N}^2$ bijektív leképezés.

Hint

A feladat a számosságokhoz kapcsolódik.

Megoldás:

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0 = \aleph_0 = \left|\mathbb{N}^3\right| \quad \Longrightarrow \quad$ létezik bijekció
- $\left|\mathbb{Q}^7\right| = \aleph_0 \neq c = |\mathbb{R}| \quad \Longrightarrow \quad$ nem létezik bijekció
- $|\mathbb{R}| = c \neq \aleph_0 = \left|\mathbb{N}^2\right| \quad \Longrightarrow \quad$ nem létezik bijekció

7. kérdés

(7) Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa?

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	−1 ○	−2 ○	−3 ○	egyéb ○	!

7. feladat

Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa?

7. kérdés

7. feladat

Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa?

Megoldás:

Kifejtem a determinánst a második oszlopa szerint:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 0. \end{aligned}$$

8. kérdés

(8) Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van? (Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯	6 ◯	7 ◯	8 ◯	!

8. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van? (Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

8. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van?
(Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

Megoldás:

$$\begin{array}{c|c|} & A \\ \hline A & A \cdot A = A^2 \\ \hline \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc|} & & & -1 & 2 & 1 \\ & & & 2 & 1 & 3 \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

9. kérdés

(9) Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.	!	igen ◯	nem ◯	!
A mátrix megegyezik a transzponáltjával.	!	igen ◯	nem ◯	!
A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.	!	igen ◯	nem ◯	!

9. feladat

Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

- A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.
- A mátrix megegyezik a transzponáltjával.
- A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

9. kérdés

9. feladat

Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

- A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.
- A mátrix megegyezik a transzponáltjával.
- A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

Megoldás:

- Biztosan NEM nulla. (Paralelepipedon.)
- Semmi releváns információ nincs a kijelentésben a feladat szempontjából.
- Biztosan nulla. (Kifejtjük a csupa nulla oszlop szerint.)

10. kérdés

(10) Az $\mathbf{R}^5$-ben tekintsük az $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$ részhalmazt. Hánydimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯	egyéb ◯	!

10. feladat

Az $\mathbb{R}^5$-ben tekintsük az
$S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\right\}$
részhalmazt. Hány dimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

10. kérdés

10. feladat

Az $\mathbb{R}^5$-ben tekintsük az
$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$
részhalmazt. Hány dimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

Hint

A tanár úr már gondolt rá.

Megoldás:

Megoldjuk az egyenletet (egyenletrendszert), és a szabad változók száma adja a megoldásaltér dimenzióját. Most látható, hogy 4 szabadismeretlen van, tehát az S altér 4-dimenziós.

Tartalom

1. kérdés

(1) Legyen $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ és $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ○	reflexív ○	részbenrendezés ○	egyik sem ○	?

1. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ és $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus	reflexív	részbenrendezés	egyik sem	?

1. kérdés

1. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ és $\rho = \big\{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\big\} \subseteq A^2$.
Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus	reflexív	részbenrendezés	egyik sem	?

Megoldás:

- Antiszimmetrikus, mert $(a, b) \in \rho$ és $(b, a) \in \rho$ egyszerre nem is teljesülhet. (Logika - implikáció: $h \rightarrow$bármi $=$ igaz.)
- Nem reflexív, mert bármely $a \in A$ esetében $a - a = 0$, azaz $(a, a) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mivel nem is reflexív. (Egyébként nem is tranzitív.)

2. kérdés

(2) Legyen $A = P(\{1,2\})$ és $B = P(\{2,3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $P(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯	6 ◯	7 ◯	egyik sem ◯	!

2. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\{1,2\})$ és $B = \mathcal{P}(\{2,3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

2. kérdés

2. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\{1,2\})$ és $B = \mathcal{P}(\{2,3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

Hint

Egyszerűen meg kell adni $A \triangle B$-t.

Megoldás:

- $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $B = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{\{1\}, \{1,2\}\} \cup \{\{3\}, \{2,3\}\} = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

3. kérdés

(3) Alteret alkotnak-e $\mathbf{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$ | ! igen ○ | nem ○ !

$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 25\}$ | ! igen ○ | nem ○ !

$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$ | ! igen ○ | nem ○ !

3. feladat

Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$

3. kérdés

3. feladat

Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$

Hint

Mit mondtam utolsó órán az alterekről?

Megoldás:

- Igen, mert minden homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere altér.
- Nem altér, mert nincs benne a nullvektor.
- Nem altér, mert nincs benne a nullvektor.

4. kérdés

(4) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ○	5 ○	7 ○	1 ○	4 ○	0 ○	−5 ○	más számérték ○	nincs értelmezve ○	!

4. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

Hint

Igen speciális mátrixszorzást kell végrehajtani, de ne ijedjünk meg tőle.

Megoldás:

- $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $$\begin{array}{c|ccc|} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$
- $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$

5. kérdés

(5) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\vec{x} = \vec{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A, és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbf{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

Ha A-nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.	! igen ◯	nem ◯ !
Ha A-nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.	! igen ◯	nem ◯ !
Ha A-nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.	! igen ◯	nem ◯ !

5. feladat

Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A, és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbb{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.
- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.
- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.

5. kérdés

5. feladat

Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A, és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbb{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.
- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.
- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.

Megoldás:

- A-nak van inverze
- $\Longrightarrow \det(A) \neq 0$
- $\Longrightarrow$ A sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak
- $\Longrightarrow$ A-ban Gauss-elimináció során nem tűnik el sor
- $\Longrightarrow$ A lépcsős alaknak 4 sora van.
- $\Longrightarrow$ Nincs szabadismeretlen.
- $\Longrightarrow$ A megoldásaltér dimenziója nulla.

6. kérdés

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\Big(\neg(\exists x)(\exists y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big)\Big) \leftrightarrow \Big((\forall x)(\forall y)\big(A(x) \wedge B(y)\big)\Big)$$

! igen ○ nem ○ !

$$((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$$

! igen ○ nem ○ !

6. feladat

Tautológiák-e az alábbi formulák?

- $(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)))$
- $((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$

6. kérdés

6. feladat

Tautológiák-e az alábbi formulák?

- $(\neg (\exists x) (\exists y) (\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow ((\forall x) (\forall y) (A(x) \wedge B(y)))$
- $((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$

Hint

Az egyik predikátum-, a másik ítéletkalkulusbeli formula.

Megoldás:

- Tautológia: a $\leftrightarrow$ két oldalán egymással ekvivalens formulák állnak. (Ugyanaz a tagadás, más formában.)
- Ha nincs jobb ötlet: igazságtábla, és megnézni, hogy mindenhol igaz jön-e ki. NEM.

7. kérdés

(7) Legyen $f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ◯	g szürjektív ◯	g injektív ◯	egyik sem ◯	?

7. feladat

Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív	g szürjektív	g injektív	egyik sem	?

7. kérdés

7. feladat

Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív	g szürjektív	g injektív	egyik sem	?

Megoldás:

- f nem injektív. Ellenpélda: $(1, 4) \mapsto 5$, $(2, 3) \mapsto 5$ DE $(1, 4) \neq (2, 3)$.
- g nem szürjektív. A $(0, 0)$-nak nincs őse.
- g injektív. Definíció szerint könnyen kijön.

8. kérdés

(8) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbf{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ◯	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ◯	$\vec{a}, \vec{b}$ ◯	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ ◯	egyik sem ◯	?

8. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\overrightarrow{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\overrightarrow{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$	$\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$	$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{0}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}$	egyik sem	?

8. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\overrightarrow{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\overrightarrow{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$	$\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$	$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{0}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}$	egyik sem	?

Hint

Standard feladat, nincs szükség segítségre.

Megoldás:

- Lineárisan függő.
- Lineárisan független.
- Lineárisan független.
- Lineárisan függő.

9. kérdés

(9) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$ ○	$\mathcal{D}$ ○	$\mathcal{E}$ ○	egyik sem ○	?

9. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül, melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	?

9. kérdés

9. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül, melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	?

Hint

Hogy néz ki az osztályozás?

Megoldás:

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás (a 2-es két blokkban szerepel)
- $\mathcal{E}$ nem osztályozás (a 2-es biztos nem szerepel egy blokkban sem)

10. kérdés

(10) Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám? Pontosabban, az A^{-1} -ben **hány helyen** van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1}, akkor az „egyéb" lehetőséget jelölje meg.

!	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	7 ◯	8 ◯	9 ◯	egyéb ◯	!

10. feladat

Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám? Pontosabban, az A^{-1}-ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1}, akkor az „egyéb" lehetőséget jelölje meg.

10. kérdés

10. feladat

Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám? Pontosabban, az A^{-1}-ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1}, akkor az „egyéb” lehetőséget jelölje meg.

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tartalom

1. kérdés

(1) Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbf{Z}$-n értelmezett $\rho = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^2 \leq y^2\} \subseteq \mathbf{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus ◯	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	tranzitív ◯	egyik sem ◯	?

1. feladat

Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbb{Z}$-n értelmezett $\rho = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\right\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	tranzitív	egyik sem	?

1. kérdés

1. feladat

Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbb{Z}$-n értelmezett
$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	tranzitív	egyik sem	?

Megoldás:

- Nem szimmetrikus: $(0, 1) \in \rho$ de $(1, 0) \notin \rho$.
- Nem antiszimmetrikus: $(-1, 1) \in \rho$, $(1, -1) \in \rho$ de $1 \neq -1$.
- Reflexív: minden $x \in \mathbb{Z}$-re $(x, x) \in \rho$, mert $x^2 \leq x^2$.
- Tranzitív: $x^2 \leq y^2$-ből és $y^2 \leq z^2$-ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$.

2. kérdés

(2) Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3-i)z = 5+5i$. Mennyi z **képzetes része** (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

!	-3 ◯	-2 ◯	-1 ◯	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	egyik sem ◯	!

2. feladat

Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3-i)z = 5+5i$. Mennyi z képzetes része (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

2. kérdés

2. feladat

Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3-i)z = 5+5i$. Mennyi z képzetes része (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

Hint

Úgy kell megoldani, mint egy középiskolai lineáris egyenletet.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
(3-i)z &= 5+5i \\
z &= \frac{5+5i}{3-i} \\
z &= \frac{5+5i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{10+20i}{10} \\
z &= 1+2i
\end{aligned}$$

3. kérdés

(3) Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \to (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyéb ○	!

3. feladat

Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \to (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

3. kérdés

3. feladat

Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

Megoldás:
Igazságtáblázat $\Rightarrow$ megnézni hány különböző kiértékelésre igaz (a 8-ból) $\Rightarrow$ez lesz a diszjunkció tagjainak a száma.
Másik megoldás:

$$
\begin{array}{rcl}
A \rightarrow (B \vee (\neg C)) & = & h \\
A = i & \& & B \vee (\neg C) = h \\
 & & B = h \,\&\, \neg C = h \\
 & & B = h \,\&\, C = i
\end{array}
$$

A formula 1 darab kiértékelésre hamis, tehát 7 darabra igaz. Így a $\vee$ jelek száma 6.

4. kérdés

(4) Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek **összege** az alábbiak közül:

!	$-\infty$ ○	-4 ○	0 ○	1 ○	3 ○	6 ○	10 ○	∞ ○	egyik sem ○	!

4. feladat

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek összege az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek összege az alábbiak közül?

Hint

Elég speciális a mátrix alakja.

Megoldás:

Trianguláris mátrix sajátértékei a főátlóban lévő elemei.

5. kérdés

(5) Mekkora annak a parallelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1,1,0)$, $(0,2,2)$ és $(1,0,1)$ pontok?

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!

5. feladat

Mekkora annak a parallelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1,1,0)$, $(0,2,2)$, és $(1,0,1)$ pontok?

5. kérdés

5. feladat

Mekkora annak a parallelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1,1,0)$, $(0,2,2)$, és $(1,0,1)$ pontok?

Hint

Ez egy alkalmazása a determinánsoknak.

Megoldás:

Felírjuk a determinánst, és kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - (-2) = 4$$

6. kérdés

(6) Igazak-e az alábbiak:

$\mathbf{R} \times \mathbf{N}$ megszámlálhatóan végtelen.

$|\mathbf{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

$|\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}| = \aleph_0$.

!	igen ○	nem ○	!
!	igen ○	nem ○	!
!	igen ○	nem ○	!

6. feladat

Igazak-e az alábbiak?

- $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.
- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

6. kérdés

6. feladat

Igazak-e az alábbiak?

- $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.
- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Hint

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = c$.
Számosságaritmetika alaptétele.

Megoldás:

- Hamis: $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \max\{c, \aleph_0\} = c$.
- Igaz.
- Igaz: $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$.

7. kérdés

(7) Az alábbi

$$
\begin{array}{ll}
A: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz\big) \\
B: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf\big) \\
C: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg\big)
\end{array}
$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

!	A ◯	B ◯	C ◯	egyik sem ◯	!

7. feladat

Az alábbi

$$
\begin{array}{ll}
A: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz) \\
B: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf) \\
C: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg)
\end{array}
$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

7. feladat

Az alábbi

$$
\begin{aligned}
A: &\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz)\\
B: &\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf)\\
C: &\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg)
\end{aligned}
$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

Hint

- MELYIK...?
- Fordított lengyel jelölés = postfix ábrázolás.
- Használjunk konkrét f és g-t, például szorzást és összeadást.

7. feladat'

Melyik formula fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

Megoldás:

- Infix ábrázolás:

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ xf(ygz) &= (xfy)g(xfz) \end{aligned}$$

- Postfix ábrázolás:

$$\begin{aligned} xyz + \cdot &= xy \cdot xz \cdot + \\ xyzgf &= xyfxzfg \end{aligned}$$

- Ez már elég? Nem.
- Válasz: C.

8. kérdés

(8) Legyen $\vec{a} = (3,2,0,1)$, $\vec{b} = (-1,1,2,1)$, $\vec{v} = (12,3,-6,0) \in \mathbf{R}^4$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ alakban ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható **összege**) az alábbiak közül?

!	1 ○	2 ○	3 ○	−1 ○	0 ○	−2 ○	−3 ○	−5 ○	egyéb ○	!

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

8. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (3,2,0,1)$, $\overrightarrow{b} = (-1,1,2,1)$, $\overrightarrow{v} = (12,3,-6,0) \in \mathbb{R}^4$. Írjuk fel a $\overrightarrow{v}$ vektort $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$ alakban ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható összege) az alábbiak közül?

8. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (3, 2, 0, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 1, 2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (12, 3, -6, 0) \in \mathbb{R}^4$. Írjuk fel a $\overrightarrow{v}$ vektort $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}$ alakban ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható összege) az alábbiak közül?

Hint

Standard módszer vs. gondolkozzunk vs. vegyük észre.

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 3 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

9. kérdés

(9) Legyen $\vec{a} = (1, -1, 2)$ és $\vec{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\vec{a} \times \vec{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

!	$(-5, 2, -1)$ ○	$(-3, -5, -1)$ ○	$(-9, -9, 9)$ ○	$(9, -9, -9)$ ○	$(3, 7, 5)$ ○	egyik sem ○	!

9. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)$ és $\overrightarrow{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

9. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)$ és $\overrightarrow{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

Hint

Csak tudni kell mi az a vektoriális szorzás.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= i \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -3i - 5j - k = (-3, -5, -1)
\end{aligned}$$

10. kérdés

(10) Jelölje be a téglalapban felsorolt elemek közül azokat, amelyek szerepelnek (egyszer vagy többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében!

?	-3 ○	-2 ○	-1 ○	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	egyik sem szerepel ○	?

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

10. feladat

Jelölje be a téglalapban felsorol elemek közül azokat, amelyek szerepelnek (egyszer vagy többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében!

10. feladat

Jelölje be a téglalapban felsorol elemek közül azokat, amelyek szerepelnek (egyszer vagy többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében!

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tartalom

3. kérdés

(8) Legyen $A := \{0, 1, \ldots, 8\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, $\beta := \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma := A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

?	tranzitív ◯	antiszimmetrikus ◯	dichotom ◯	egyik sem ◯	?

3. feladat

Legyen $A = \{0, 1, \ldots, 8\}$, $\alpha = \left\{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\right\} \subseteq A^2$, $\beta = \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma = A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

tranzitív	antiszimmetrikus	dichotom	egyik sem

3. kérdés

3. feladat

Legyen $A = \{0, 1, \ldots, 8\}$, $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, $\beta = \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma = A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

tranzitív	antiszimmetrikus	dichotom	egyik sem

Hint

Legalább az alaphalmaz véges.

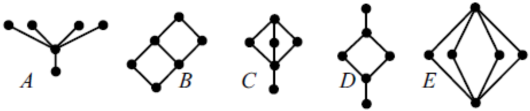
Megoldás:

- $\alpha =$ „legfeljebb 5 távolságra vannak"
- $\alpha^{-1} = \alpha$
- $\beta =$ „legfeljebb 10 távolságra vannak" $= A^2$
- $\gamma = \emptyset$

$$\Longrightarrow \gamma \text{ tranzitív, antiszimmetrikus, nem dichotóm.}$$

6. kérdés

(4) Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?



?	A ○	B ○	C ○	D ○	E ○	egyiknek sincs ○	?

6. feladat

Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?

Megoldás: Mindnek van.

7. kérdés

(6) Legyen

$$\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x-1, & \text{ha } x > 1 \end{cases},$$
$$\beta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad x \mapsto x + 1 \quad .$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

?	α szürjektív ◯	β injektív ◯	β szürjektív ◯	az előzőek egyike sem ◯	?

7. feladat

Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x-1, & \text{ha } x > 1 \end{cases},$$
$$\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

α szürjektív	β injektív	β szürjektív
az előzőek egyike sem		

7. kérdés

7. feladat

Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases},$$

$$\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

α szürjektív	β injektív	β szürjektív
az előzőek egyike sem		

Megoldás:

- α szürjektív, mert az x tetszőleges természetes szám őse (például) az $x + 1$ szám.
- β injektív, mert ha $x + 1 = y + 1$, akkor $x = y$.
- β nem szürjektív, mivel az 1-nek nincs őse.

8. kérdés

(7) Legyen $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $x \mapsto (x^2 + 5, x^2 + 1)$, és $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak:

„$\varphi\psi$ szürjektív.”	! igen ○	nem ○ !
„φ injektív.”	! igen ○	nem ○ !
„ψ szürjektív.”	! igen ○	nem ○ !

8. feladat

Legyen $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \left(x^2 + 5, x^2 + 1\right)$, és $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak:

- „$\varphi\psi$ szürjektív.”
- „φ injektív.”
- „ψ szürjektív.”

8. kérdés

8. feladat

Legyen $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ x \mapsto \left(x^2 + 5, x^2 + 1\right)$, és $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak:

- „$\varphi\psi$ szürjektív."
- „φ injektív."
- „ψ szürjektív."

Megoldás:

- φ injektív, mert „koordinátánként" injektív.
- ψ szürjektív, mert egy negatív x egész szám őse például a $(0, |x|)$ számpár, pozitív egész x esetén az őse például $(x, 0)$, és a nullának is végtelen sok őse van.
- $\varphi\psi$ nem szürjektív. Nem létezik olyan $x \in \mathbb{N}$, melyre $x\left(\varphi\psi\right) = 0$.

Vége

Köszönöm a figyelmet!