Vektorok, vektortér

Vektorok, vektorműveletek, vektortér,
lineáris független vektorrendszerek.

1. Vektorműveletek

1. Definíció. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és a $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ két $\mathbb{R}^3$-beli vektor, és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár. Ekkor definiálhatjuk a vektorok **összeadás**át és **skalárszoros**át:

- $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \in \mathbb{R}^3$,
- $c\underline{a} = (ca_1, ca_2, ca_3) \in \mathbb{R}^3$.

2. *Megjegyzés.* Természetesen a fenti definíciók nem csak három koordinátájú vektorokra igazak, hanem tetszőleges véges dimenziójú vektorokra. Ugyanúgy mint mátrixok, és mint minden új objektum esetében érdemes megemlékezni a műveletek legfontosabb tulajdonságairól.

3. Tétel. *A sík vagy a tér tetszőleges $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ szabadvektoraira és tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ skalárokra*

- $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$,
- $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$,
- $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$,
- $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$,
- $c(\underline{a} + \underline{b}) = c\underline{a} + c\underline{b}$,
- $(c + d)\underline{a} = c\underline{a} + d\underline{a}$,
- $c(d\underline{a}) = (cd)\underline{a}$,
- $1\underline{a} = \underline{a}$,
- $0\underline{a} = c\underline{0} = \underline{0}$.

A fenti tétel azért van kis betűvel szedve, mert igazából nem is tételek, hanem könnyen átgondolható trivialitások. Főleg, ha egy n-dimenziós vektort egy $(1 \times n)$-es mátrixnak képzelünk el, mert akkor ezekkel a tulajdonságokkal már találkoztunk.

4. Definíció. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Ekkor az $\underline{a}$ **hossz**át $|\underline{a}|$-val jelöljük, és a következő módon számoljuk ki:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

5. *Megjegyzés.* Természetesen az előző definícióhoz hasonló megfogalmazható 2-dimenziós vektorokra, és 3-nál magasabb dimenziós vektorokra is.

6. Definíció. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok **skaláris szorzat**án a

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\underline{a}, \underline{b})$$

szorzatot értjük, ahol $\cos(\underline{a}, \underline{b})$ az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektor által bezárt szög koszinusza.

7. Tétel. *Legyen az* $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és a* $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *két* $\mathbb{R}^3$*-beli vektor. Ekkor*

$$\underline{ab} = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

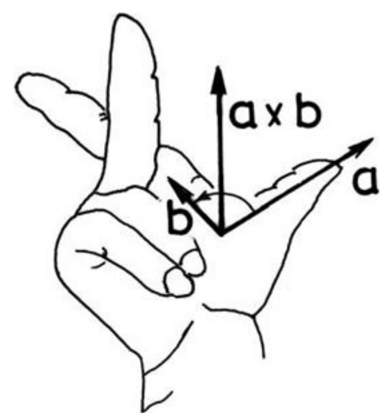
8. *Megjegyzés.* A skaláris szorzásra vonatkozó tétel természetes módon átalakítható magasabb dimenzióra is.

Tegyünk különbséget a definíció és a tétel között. Ha meg van adva két vektor, például $(1, 2, 3)$ és $(-5, 2, 1)$, akkor hogy számítjuk ki a skaláris szorzatukat? Hát nem definíció szerint, mert nem ismerjük a köztük lévő szöget. Ha azonban tudjuk a vektorok hosszát és a szögét, akkor nyugodtan alkalmazhatjuk a definícióban szereplő képletet.

9. Definíció. Legyen az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ két $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Ekkor $\underline{a} \times \underline{b}$ jelöli azt a vektort, amely a két vektor **vektoriális szorzat**ának eredménye. Erre az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorra teljesül, hogy

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin(\underline{a}, \underline{b}),$$

valamint, hogy $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorra is, és az irányát a jobbkézszabály határozza meg.



10. Tétel. *Legyen az* $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és a* $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *két* $\mathbb{R}^3$*-beli vektor. Ekkor*

$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i}\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{j}\,(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{k}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1)\,. \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)\,. \end{aligned}$$

11. *Megjegyzés.* A skaláris szorzattal ellentétben a vektoriális szorzat nehezen terjeszthető ki magasabb dimenziókra.

12. Definíció. Legyen az $\underline{a}, \underline{b}$ és a $\underline{c}$ három $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Ekkor az

$$\underline{abc} = \langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle$$

mennyiséget a három vektor **vegyes szorzat**ának nevezzük.

13. *Megjegyzés.* A vegyes szorzat geometriailag az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon „előjeles térfogatát” adja meg.

14. Tétel. *Legyen az* $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *és a* $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *három* $\mathbb{R}^3$*-beli vektor. Ekkor*

$$\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

15. Példa. $\underline{a} = (2, 6, -1)$, $\underline{b} = (-3, -9, 8)$, $\underline{c} = (5, 3, -2)$

- $\underline{a} + \underline{b} = (2-3, 6-9, -1+8) = (-1, -3, 7)$
- $4\underline{a} = (4 \cdot 2, 4 \cdot 6, 4 \cdot (-1)) = (8, 24, -4)$
- $\underline{a}\underline{b} = 2 \cdot (-3) + 6 \cdot (-9) + (-1) \cdot 8 = -68$
- $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -9 & 8 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -9 & 8 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = (39, -13, 0)$
- $\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & -9 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 36 + 9 + 240 - 45 - 36 - 48 = 156$

2. Vektortér

Ebben a fejezetben bevezetjük az absztrakt vektortér fogalmát.

16. Definíció. A T számtest feletti **vektortér** egy olyan $(V, +, \cdot)$ struktúra, melyre tetszőleges $u, v, w \in V$ és $c, d \in T$ esetén teljesül az alábbi 8 axióma.

1. $u + v = v + u$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. Létezik 0-vektor.
4. Létezik additív inverz (ellentett).
5. $c(u + v) = cu + cv$.
6. $(c + d)u = cu + du$.
7. $(cd)u = c(du)$.
8. $1u = u$.

Egyszerűen csak meg kell próbálni elengedni azt a berögzülést, hogy a vektor szó hallatán egy (v_1, v_2, v_3) alakú valamire gondolunk. Például gondoljunk bele, hogy legfeljebb másodfokú polinomokat ugyanúgy össze tudunk adni egymással, meg valós számmal megszorozni, mint vektorokat. Tehát akkor joggal nevezhetnénk a legfeljebb másodfokú polinomokat is vektoroknak, halmazukat pedig vektortérnek. (Ehhez az is kell, hogy a fenti nyolc tulajdonság teljesüljön, de tényleg teljesül.) Ettől függetlenül mi ugyanúgy csak „igazi” vektorokkal fogunk dolgozni.

17. Definíció. Legyen V egy T számtest feletti vektortér. Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}_0$, $v_1, \ldots v_n \in V$, és $c_1, \ldots c_n \in T$. Ekkor a

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

vektort a $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorok $c_1, \ldots c_n$ együtthatókkal képzett **lineáris kombináció**jának nevezzük. Ha minden c_i együttható nulla, akkor **triviális lineáris kombináció**ról beszélünk.

18. Példa. Legyenek $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a tér x, y, z tengely irányába eső egységvektorai. Ekkor a tér tetszőleges $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektora felírható ezen egységvektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$.

19. Definíció. Legyen V egy T számtest feletti vektortér. A V elemeiből képzett véges rendszereket **vektorrendszer**eknek nevezzük. Egy ilyen $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha a zérusvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő, azaz bármely $c_1, \ldots, c_k \in T$ esetén,

$$\text{ha } c_1v_1 + \ldots c_kv_k = 0, \text{ akkor } c_1 = \ldots c_k = 0.$$

Ellenkező esetben a vektorrendszert **lineárisan függő**nek nevezzük.

20. Példa. Ha egy vektorrendszer tartalmazza a nullvektort, vagy egynél többször valamely vektort, akkor lineárisan függő. A térbeli $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorrendszer lineárisan független.

21. Tétel. *Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és a $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ három $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszerből alkotott*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

determináns nulla.

22. Példa. Független-e az alábbi három vektor?

$$\underline{a} = (-2; 1; 0),\ \underline{b} = (4; 0; 2),\ \underline{c} = (0; -1; -5)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} &= -2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -2(0-(-2)) - 1(-20-0) = -4+20 = 16 \end{aligned}$$

Mivel a determináns nem nulla, a három vektor lineárisan független.

23. Példa. Lineárisan függő-e az alábbi három vektor?

$$a = (-3; 0; 1; 2), \quad b = (-1; 2; 0; 0), \quad c = (-2; -2; 1; 2)$$

Ez determináns számolással nem dönthető el, tehát Gauss-eliminációval kell megoldani feladatot.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) : Az 1. és 2. sort megcseréljük.
(2) : Az 1. sor (-3)-szorosát hozzáadom a 2. sorhoz.
(3) : Az 1. sor (-2)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
(4) : A 2. sor (-1)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
(5) : Elhagyom a 3. csupa nulla sort.
Mivel kevesebb sorunk maradt (a vektorrendszer rangja kettő), mint ahány vektorral indultunk, ezért a vektorrendszer lineárisan függő.

24. Példa. Lineárisan függő-e az alábbi három vektor?

$$a = (-1; 2; 0; 0), \quad b = (-2; -2; 1; 2), \quad c = (1; 2; 1; 2)$$

Ez determináns számolással nem dönthető el, tehát Gauss-eliminációval kell megoldani feladatot.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{10}{6} & \frac{20}{6} \end{pmatrix}$$

(1) : Az 1. sor (-2)-szeresét hozzáadom a 2. sorhoz.
(2) : Az 1. sor 1-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
(3) : A 2. sort osztom 6-tal.
(4) : A 2. sor 4-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
Mivel ugyanannyi sorunk maradt (a vektorrendszer rangja három), mint ahány vektorral indultunk, ezért a vektorrendszer lineárisan független.