Mátrixok

Mátrixok. Mátrixműveletek és tulajdonságaik. Sajátérték, sajátvektor.

Ebben a részben a matematika olyan részét tárgyaljuk, melynek először nem látszik, hogy mi haszna lehet. Elég számolásigényes, de legalább könnyen algoritmizálhatóak ezek a számolások. A kurzus kereteibe sajnos nem fér bele, hogy ezek a matematikai objektumok hogyan segítenek (főleg egy informatikusnak) problémákat modellezni, de próbáljuk meg elfogadni, hogy a sok számolás mögött értelem és alkalmazás is van.

1. Mátrixok

1. Definíció. Az M-mel jelölt $m \times n$-es **mátrix** egy T test elemeiből (a mi esetünkben ez valós számokat jelent) álló táblázat, m darab sorral és n darab oszloppal. Az ilyen paraméterekkel rendelkező mátrixot $M_{m\times n}$-nel jelöljük. Az M mátrix i-edik sorának j-edik elemét m_{ij}-vel jelöljük.

Talán ezt a fogalmat úgy ismeri mindenki a programozás kurzusról, hogy kétdimenziós tömb. Ugyanarról van szó.

2. Példa. Legyen M az alábbi mátrix:

$$M_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 0.75 \\ \pi & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 6 & -7.2 & 9\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor például $m_{13} = \sqrt{2}$.

Van két speciális mátrix, melyet mérettől függetlenül mindig ugyanúgy nevezünk.

3. Definíció. Az $(n \times n)$-es **egységmátrix** olyan mátrix, amelynek a főátlója 1-eket tartalmaz, a többi eleme, pedig nulla:

$$I_n = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Az $(n \times n)$-es **nullmátrix** olyan mátrix, amely csak nulla elemeket tartalmaz:

$$Z_n = O_n = \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Mátrixműveletek

Már többször találkoztunk azzal a jelenséggel, hogy új objektumot definiáltunk. Most is ez történt, tehát azt is definiálni kell, hogyan tudunk velük dolgozni.

4. Definíció (**Mátrixok összeadása és skalárral szorzása**)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ és $B = (b_{ij})_{m\times n}$ két T számtest feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \text{ és } cA = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

Az előző definíció virágnyelven azt jelenti, hogy csak két azonos méretű mátrixot tudunk összeadni, és ez az összeadás pozíciónkénti összeadást jelent.

5. *Megjegyzés.* Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni, különböző méretűeket sosem.

6. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -8 & 10 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \end{pmatrix}, \qquad (-2)\cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \\ -4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

7. Definíció (**Mátrixok szorzása**)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ és $B = (b_{ij})_{n\times k}$ két T számtest feletti mátrix. Ekkor

$$AB = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right)_{m\times k}.$$

A fenti szummás képletet szövegesen is elmagyarázzuk. Egy $(m\times n)$-es és egy $(n\times k)$-s mátrix szorzata $(m \times k)$-s méretű. Továbbá a szorzat i-edik sorának j-edig eleme $\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$, azaz az A mátrix i-edik sorának és a B mátrix j-edik oszlopának skaláris szorzata.

8. *Megjegyzés.* Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával.

9. *Megjegyzés.* Az AB szorzat általában nem egyezik meg a BA szorzattal, sőt még lehet, hogy a méretük miatt valamelyik nincs is értelmezve.

10. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Az AB mátrix (2×2)-es méretű lesz. A számolást végezzük úgy hogy az A megfelelő sorvektorait szorozzuk össze skalárisan B megfelelő oszlopvektorával. A skaláris szorzás a következőt jelenti:

$$\langle (a, b, c, d), (e, f, g, h)\rangle = ae + bf + cg + dh.$$

Tehát AB megkapható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (2,-3,5),(6,2,-3)\rangle & \langle (2,-3,5),(-1,-2,0)\rangle \\ \langle (1,0,8),(6,2,-3)\rangle & \langle (1,0,8),(-1,-2,0)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12-6-15 & -2+6+0 \\ 6+0-24 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (5,4,-2),(-1,0,-5)\rangle & \langle (5,4,-2),(-2,8,7)\rangle & \langle (5,4,-2),(3,3,9)\rangle \\ \langle (-9,4,6),(-1,0,-5)\rangle & \langle (-9,4,6),(-2,8,7)\rangle & \langle (-9,4,6),(3,3,9)\rangle \\ \langle (3,1,-2),(-1,0,-5)\rangle & \langle (3,1,-2),(-2,8,7)\rangle & \langle (3,1,-2),(3,3,9)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5+0+10 & -10+32-14 & 15+12-18 \\ 9+0-30 & 18+32+42 & -27+12+54 \\ -3+0+10 & -6+8-14 & 9+3-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -21 & 92 & 39 \\ 7 & -12 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12. Definíció (**Transzponálás**)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ egy T számtest feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor A^T egy $(n \times m)$-es mátrix, melynek egy tetszőleges eleme a következőképpen számítható ki:

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival, vagy másképpen fogalmazva tükrözzük a mátrixot a „főátlóra”. (Igazi főátlóról csak négyzetes mátrixok esetében szoktunk beszélni.)

13. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix},\ C^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Ugyanúgy, mint számoknál, a mátrixoknál is vannak a műveleteknek bizonyos tulajdonságai. Némelyik öröklődik a számoknál lévőkből, némelyeket a definíció alapján kell igazolni.

14. Tétel (Műveletek tulajdonságai.)**.** *Legyenek A, B, C egy tetszőleges T test feletti mátrixok, és $c, d \in T$ skalárok. Ekkor*

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $c(AB) = (cA)B$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c\left(A^T\right)$

ha a megfelelő műveletek elvégezhetőek. (Ha az egyenlőség valamelyik oldalát nem lehet elvégezni, akkor semmi értelme egyenlőségről beszélni.)

3. Sajátérték

15. Definíció. Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. Ha $xA = \lambda x$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra és valamely nemnulla $x \in T^{1\times n}$ sorvektorra, akkor λ-t az A mátrix **sajátérték**ének, az x vektort pedig az A mátrix λ-hoz tartozó **baloldali sajátvektor**nak nevezzük.

16. Definíció. Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. Ha $Ax = \lambda x$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra és valamely nemnulla $x \in T^{n\times 1}$ oszlopvektorra, akkor λ-t az A mátrix **sajátérték**ének, az x vektort pedig az A mátrix λ-hoz tartozó **jobboldali sajátvektor**nak nevezzük.

17. Definíció. Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix, és λ egy sajátértéke A-nak. Ekkor a λ-hoz tartozó bal- és jobboldali sajátvektorok halmazát a nullvektorral kiegészítve **bal-** illetve **jobboldali sajátaltér**nek nevezzük.

18. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. A

$$\chi_A(x) = (-1)^n \cdot \det\left(A - x \cdot E_n\right)$$

polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinom**jának nevezzük.

19. Tétel. *Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. Ekkor az A mátrix sajátértékei pontosan a $\chi_A(x)$ karakterisztikus polinom gyökei.*

20. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 9-x & 4 \\ 3 & 5-x \end{vmatrix} = (9-x)(5-x)-12 = x^2-14x+33,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyökei: } x_1 = 3,\ x_2 = 11.$$

Így a mátrixnak két különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 11$.

21. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} = (1-x)(5-x)+4 = x^2-6x+9,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x = 3.$$

Így a mátrixnak egy darab valós sajátértéke van: $\lambda = 3$.

22. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (1-x)(3-x)+2 = x^2-4x+5,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2-i,\ x_2 = 2+i.$$

Így a mátrixnak nincs sajátértéke, ha a valós számok teste fölött dolgozunk, viszont a komplex számok teste esetén két gyök van, így az A mátrixnak két különböző komplex sajátértéke van: $\lambda_1 = 2-i$ és $\lambda_2 = 2+i$.

23. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 8-x & 5 & 9 \\ 0 & -9-x & -1 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (8-x)(-9-x)(5-x)$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 8,\ x_2 = -9,\ x_3 = 5.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -9$ és $\lambda_3 = 5$.

24. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-(1-x)^2 & 1+(1-x) \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 2-x \\ 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 1 \\ 2x-3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)(-1-1+2x-x^2-2x+3) = (x-2)(1-x^2)
\end{aligned}$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = -1$.

4. Inverz

25. Definíció. Egy A négyzetes mátrix **inverz**ének nevezzük azt az A^{-1}-gyel jelölt mátrixot, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, ahol I a megfelelő méretű egységmátrix. (A definíció alapján egyértelmű, hogy az inverz mérete megegyezik az eredeti mátrix méretével.)

A definíció azonban semmit nem mond arról, hogy milyen mátrixoknak van inverze, és ha van, akkor hogyan számolhatjuk ki. A következőkben két kiszámítási módot fogunk ismertetni.

4.1. Tétel szerinti kiszámítás

26. Definíció. Egy $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrix a_{ij} eleméhez tartozó **adjungált aldeterminánst** A_{ij}-vel jelöljük és az

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

képlettel számítjuk ki, ahol D_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó **aldetermináns**, vagyis annak a mátrixnak a determinánsa, melyet úgy kapunk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és j-edik oszlopát.

27. Tétel. *Tetszőleges $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha* $\det(A) \neq 0$. *Ha van inverze, akkor pontosan egy van, és erre érvényes az alábbi képlet:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(A_{ji}\right)_{n\times n}.$$

28. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\det(A) = 3 + 4 - 2 - 4 = 1$$

$$A_{11}=(-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=4-6=-2,\quad A_{12}=(-1)^{(1+2)}\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=-(4-3)=-1,$$
$$A_{13}=(-1)^{(1+3)}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1,\quad A_{21}=(-1)^{(2+1)}\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=-(4-4)=0,$$
$$A_{22}=(-1)^{(2+2)}\begin{vmatrix}0&2\\1&4\end{vmatrix}=0-2=-2,\quad A_{23}=(-1)^{(2+3)}\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}=-(0-1)=1,$$
$$A_{31}=(-1)^{(3+1)}\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=3-2=1,\quad A_{32}=(-1)^{(3+2)}\begin{vmatrix}0&2\\1&3\end{vmatrix}=-(0-2)=2,$$
$$A_{33}=(-1)^{(3+3)}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=0-1=-1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^T=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

4.2. Gauss–Jordan-elemináció

29. Definíció. Egy adott M mátrix esetén a **sorvektorrendszer elemi átalakításai**n az alábbiakat értjük:

- két sor cseréje,
- egy sor megszorzása egy nemnulla konstanssal,
- egyik sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

30. Tétel. *Ha A egy $n \times n$-es négyzetes mátrix, I pedig az $n \times n$-es egységmátrix, akkor tekintsük a $B = (A \mid I)$ mátrixot. Az A mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a sorvektorrendszer elemi átalakításainak sorozatával a B mátrix $(I \mid C)$ alakra hozható. Ekkor $A^{-1} = C$.*

31. Példa. $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&3\\1&2&4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=?$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&1&3&0&1&0\\1&2&4&0&0&1\end{array}\right]\overset{(1)}{\leadsto}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\1&2&4&0&0&1\end{array}\right]\overset{(2)}{\leadsto}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\end{array}\right]\overset{(3)}{\leadsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\end{array}\right]\overset{(4)}{\leadsto}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]\overset{(5)}{\leadsto}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]$$

$$\overset{(6)}{\leadsto}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]\overset{(7)}{\leadsto}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&-1&-2&2\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

(1) 1. és 2. sor cseréje.
(2) 3. sorból kivonom az 1.-t.
(3) 1. sorból kivonom a 2.-at.
(4) 3. sorból kivonom az 2.-at.
(5) 3. sor megszorzása (-1)-gyel.
(6) 1. sorból kivonom a 3.-at.
(7) 2. sorhoz hozzáadom a 3. sor (-2)-szeresét.

32. Megjegyzés. *Hasonlóan a determináns kiszámításához nagyobb méretű mátrixok esetén itt is a Gauss–Jordan-elimináció sokkal gyorsabb, mint a tétel szerinti aldeterminánsos módszer.*

5. Informatikai alkalmazások

- A különböző geometriai transzformációk tulajdonképpen lineáris leképezésnek tekinthetők, és kifejezhetők egy alkalmas mátrixszal történő szorzás segítségével. Például tükrözzük az $(a;\, b)$ pontot az y tengelyre. Ekkor a kapott vektor $(-a,\, b)$. Ha jól megnézzük, könnyen megtaláljuk az y tengelyre való tükrözés mátrixát:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mert } (-a;\, b) = (a;\, b) \cdot A.$$

  Ilyen mátrixok megadhatók tükrözésekre, forgatásokra, vetítésekre, akár több dimenzióban is. LÁSD: Diszkrét matematika III. és Számítógépes grafika tantárgyakból.
- A gráfok egyértelműen kódolhatók szomszédsági és pont-él illeszkedési mátrixukkal. Mivel a mátrix szinte minden programnyelvben jól kezelhető egy 2-dimenziós tömbként, így ennek a kódolásnak is vannak előnyei. A gráfok az informatika több területén is előkerülnek, akár programozási algoritmus, akár hardverszinten, például beszélhetünk erőforrásgráfról, vagy a számítógép-hálózat is felfogható egy (irányított) gráfként.
- Képzeljünk el egy épületet, ahol különböző helyiségekbe különböző embereknek van belépési jogosultságuk. Ez nagyon jól kódolható egy mátrixszal: sorok=emberek, oszlopok=ajtók, és a megfelelő pozícióban 1-es van, ha az adott embernek van belépési jogosultsága, 0, ha nincs.
- Lineáris egyenletrendszer esetén elég az egyenletrendszer bővített mátrixával dolgozni. Sokszor kell megoldani lineáris egyenletrendszert, és érdekes kérdések merülnek fel a numerikus precizitás és a számolás időigénye kapcsán, LÁSD: Közelítő és szimbolikus számítások.
- Kódoláselméletben bizonyos kódok esetében a kódolás és a dekódolás is egy-egy mátrixszorzással kivitelezhető. Ide kapcsolódik a generátormátrix és a paritás-ellenőrző mátrix fogalma is, LÁSD: Diszkrét matematika III.