Predikátumkalkulus

Predikátumkalkulus alapfogalmai, formalizálás,
tagadás, logikailag igaz formulák.

1. Bevezető

Vizsgáljuk meg a következő két kijelentést.

- Minden almához tartozik egy fa, amiről leesett.
- Bármely két racionális szám között van irracionális szám.

Az eddig tanult ítéletkalkulusbeli lehetőségek szerint ezek prímítéletek lennének, de érezzük rajtuk, hogy több információt hordoznak. Ezen probléma kiküszöbölése miatt ismerkedjünk meg a predikátumkalkulussal. A predikátumkalkulust az ítéletkalkulus kiegészítésének is tekinthetjük. A predikátumkalkulus eszközeivel az állítások precízebben formalizálhatók, logikailag jobban vizsgálhatók.

2. Predikátumkalkulus, formalizálás

1. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus szimbólumai**:

- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$ és a „vessző”;
- $\exists$, azaz **egzisztenciális kvantor**: „létezik”, „van olyan”, „található”, „néhány”, „bizonyos”, „valamely”, ...;
- $\forall$, azaz **univerzális kvantor**: „bármely”, „minden”, „tetszőleges”, „az összes”, ...;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ **individuumváltozók**, ezekre mint vizsgálandó objektumegyedekre kell gondolni, ezen individuumváltozók halmaza az individuumtartomány;
- **predikátumjelek** nemüres halmaza: a predikátum olyan függvény, amely individuumváltozókból logikai állítást készít;
- **függvényjelek** (esetleg üres) halmaza: olyan függvényekre kell gondolni, amely több objektumból egy új objektumot készít, azaz ezek szolgálnak a műveletek kifejezésére.

2. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus kifejezései** az alábbi rekurzió szabályai szerint megadható jelsorozatok.

- Az x_i individuumváltozók és individuumkonstansok önmagukban kifejezések;
- ha $k_1, \ldots, k_n$ kifejezések, akkor bármely f függvényjelre $f(k_1, \ldots, k_n)$ is kifejezés, ha az f függvény n-változós;

- az elsőrendű predikátumkalkulus minden kifejezése előáll az előző két szabály véges sokszori alkalmazásával.

3. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus atomi formulái** a $P(k_1, \ldots, k_n)$ alakú jelsorozatok, ahol P egy n-változós predikátumjel, $k_1, \ldots, k_n$ pedig kifejezések.

4. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus formulái**

- az atomi formulák;
- ha F és G formulák, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(F \to G)$, $(\neg F)$ is formulák;
- ha F formula és x_i individuumváltozó, akkor $(\forall x_i)\, F$ és $(\exists x_i)\, F$ is formula;
- az elsőrendű predikátumkalkulus minden formulája előáll az előző három szabály véges sokszori alkalmazásával.

FONTOS: a kvantor mindig az utána álló legrövidebb részformulára vonatkozik!
Most már megvannak a formalizáláshoz szükséges eszközeink és szabályaink. Lássunk néhány példát.

5. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden strucc madár.”

- Legyen $U = \{\text{állatok}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjelek: $S(x)$: „x strucc”, $M(x)$: „x madár”.
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(S(x) \to M(x))$.

Mint a fenti példában is látható, egy predikátumjel egy adott objektumból állítást készít.

6. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden strucc madár.”

- Legyen $U = \{\text{struccok}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $M(x)$: „x madár”.
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(M(x))$.

Az előző két példa rávilágít arra, hogy fontos hogyan választjuk meg az individuumtartományt. Az első könnyebben bővíthető, például új predikátum jelek bevezetésével könnyen formalizálható a „Minden hal vízben él.” mondat, míg a második individuumtartomány nem engedi meg az állítás formalizálását. Konkrét feladatoknál általában az individuumtartomány és a predikátumjelek előre adottak, ha nem, akkor szabadon megválaszthatóak. A valós életben ez mindig modellfüggő.

7. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden szentnek maga felé hajlik a keze.”

- Legyen $U = \{\text{emberek}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $Sz(x)$: „x szent”, $H(x, y)$: „x-nek y felé hajlik a keze”.
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(Sz(x) \to H(x, x))$.

8. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Ha egy gyerek kék szemű, akkor az édesapja is kék szemű.”

- Legyen $U = \{\text{emberek}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $G(x)$: „x gyerek”, $K(x)$: „x kék szemű”.
- Függvényjel: $a(x)$: „x édesapja”.
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(G(x) \to (K(x) \to K(a(x))))$.

3. Tagadás

Gyakran van szükségünk arra, hogy pontosan megfogalmazzuk egy állítás tagadását. Állítások tagadására van szükség például kontrapozíciós, indirekt bizonyítások és elemi logikai átgondolások során is. Ha ismerjük egy állítás tagadásának logikai értékét, akkor az eredeti állításét is tudjuk, és néha könnyebb vizsgálni egy állítás tagadását. Vizsgáljuk meg, hogy miként tudjuk egy predikátumkalkulusbeli állítás tagadását felírni pusztán az állítás formulájából. Ezt két tétel alkalmazásával végezhetjük el.

9. Tétel. *Predikátumkalkulusban teljesül az alábbi két logikai ekvivalencia:*

$$\begin{aligned} \neg\,((\forall x)\,F) &\equiv (\exists x)\,(\neg F)\,, \\ \neg\,((\exists x)\,F) &\equiv (\forall x)\,(\neg F)\,. \end{aligned}$$

10. Tétel. *Tetszőleges A és B formula esetén teljesülnek az alábbi ekvivalenciák:*

- $\neg\,(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$
- $\neg\,(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
- $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$
- $\neg\,(A \to B) \equiv A \wedge (\neg B)$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

Az előző két tétel egy szabályt ad a tagadásra. Mindig részformulánként kell tagadni, és ha a negációjel egy kvantorral találkozik, akkor a kvantor megváltozik, és a tagadás a részformulában beljebb csúszik.

11. Példa. Formalizáljuk az alábbi állítás tagadását: „Minden strucc madár.”

- Az állítást már formalizáltuk egy korábbi példában: $(\forall x)\,(S(x) \rightarrow M(x))$.
- Tagadjuk a formulát:

$$\neg\,(\forall x)\,(S(x) \rightarrow M(x)) \equiv (\exists x)\,(\neg\,(S(x) \rightarrow M(x))) \equiv (\exists x)\,(S(x) \wedge (\neg M(x)))\,.$$

- Ha jelentéstartalmilag tagadjuk az állítást, akkor azt kell formalizálni, hogy „Létezik olyan strucc, ami nem madár.” Ez pontosan az előbb kapott negált formulával formalizálható.

Az előbbi példa rámutat arra, hogy egy állítást kétféleképpen is lehet tagadni. Megalkothatjuk a tagadásnak megfelelő állítást, és azt formalizálhatjuk, vagy az eredeti állítást formalizáljuk, és azt tagadjuk a szabályok szerint. Logikailag ekvivalens formulákat kell kapnunk.

12. Példa. Adjuk meg a következő formula negáltját.

$$(\forall x)\,((\neg P(x)) \wedge (\exists y)\,(Q(x,y) \rightarrow R(y)))$$

$$\begin{aligned}
\neg\,(\forall x)\,((\neg P(x)) \wedge (\exists y)\,(Q(x,y) \rightarrow R(y))) &\equiv (\exists x)\,(\neg\,((\neg P(x)) \wedge (\exists y)\,(Q(x,y) \rightarrow R(y))))\\
&\equiv (\exists x)\,(\neg\,(\neg P(x)) \vee (\neg\,(\exists y)\,(Q(x,y) \rightarrow R(y))))\\
&\equiv (\exists x)\,(P(x) \vee ((\forall y)\,(\neg\,(Q(x,y) \rightarrow R(y)))))\\
&\equiv (\exists x)\,(P(x) \vee ((\forall y)\,(Q(x,y) \wedge (\neg R(y)))))
\end{aligned}$$

4. Logikailag igaz formulák (tautológiák)

Az ítéletkalkulusbeli formuláktól eltérően nincs általános algoritmus arra, hogy egy predikátumkalkulusbeli formuláról eldöntsük azt, hogy tautológia-e. Sőt, már a tautológia fogalma sem definiálható olyan könnyen, mint az ítéletkalkulus esetén.

13. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus interpretációjá**hoz a következő lépéseket kell véghezvinni.

(1) Választunk egy nemüres A halmazt, ez lesz az interpretációs tartomány.
(2) Minden P predikátumjelhez hozzárendelünk egy A-n értelmezett ugyanannyi változós predikátumot.
(3) Minden f függvényjelhez hozzárendelünk egy A-n értelmezett ugyanannyi változós függvényt.

Az előző definíció tulajdonképpen arról szól, hogy egy adott formulának értelmet adunk, azaz egy karaktersorozat helyett már egy konkrét állítás formalizálásaként tekintünk rá. Technikailag bármely $a = (a_1, a_2, \ldots), a_1, a_2, \ldots \in A$ sorozat esetén az a_i-t a formulában x_i helyére beírva el tudjuk dönteni, hogy a formula igaz-e vagy sem, az adott interpretáció esetén.

14. Definíció. Egy predikátumkalkulusbeli formula **tautológia**, azaz logikailag igaz formula, ha bármely interpretációja esetén tetszőleges $a = (a_1, a_2, \ldots), a_1, a_2, \ldots \in A$ sorozatra az x_i-k helyére a_i-ket írva logikailag igaz értéket kapunk.

Még egyszer fontos kihangsúlyozni, hogy predikátumkalkulus esetén nincs algoritmus, amivel el tudnánk dönteni egy formuláról, hogy tautológia-e, eltérően az ítéletkalkulustól. Függetlenül ettől néhány egyszerű feladatot azért mi is meg tudunk oldani.

15. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\exists x)(P(x)) \to (\forall x)(P(x))$$

Megoldás: nem. Ha intuíció alapján akarjuk indokolni a dolgot, akkor csak annyi az egész, hogy ha létezik olyan objektum, amire valami teljesül, az nem jelenti azt, hogy minden objektumra teljesül. Nagyon egyszerűen meg tudjuk adni a formális választ is: legyen az interpretációs tartomány a természetes számok halmaza, és $P(x)$ jelentse azt, hogy x prím. Ekkor egy $i \to h$ implikációt kapunk, melynek értéke hamis. Találtunk egy interpretációt, mely esetén a formula hamis, ezért nem tautológia.

16. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\neg(\exists x)(\forall x)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$$

Megoldás: a formula tautológia, mert az $\leftrightarrow$ jel bal és jobb oldalán álló formula egymással ekvivalens, a jobb oldali adja meg mi lesz akkor, ha a bal oldaliban a negációjelet beljebb visszük a formulában. Ha az $\leftrightarrow$ két oldalán ekvivalens formulák állnak, akkor az tautológia, mint ahogy ezt már ítéletkalkulusból tanultuk.

17. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\exists x)(B(x, y) \to x = y) \leftrightarrow (\forall x)(\neg(B(x, y) \to x = y))$$

Megoldás: megsejtjük, hogy a formula nem tautológia, ezért keresünk olyan interpretációt, melynél van olyan kiértékelés, amelynél hamis értéket kapunk. (Megsejthetjük például úgy, hogy észrevesszük, hogy az ekvivalenciajel jobb oldalán álló formula pontosan a bal oldali tagadása.) Legyen A egy tetszőleges legalább kételemű interpretációs tartomány, B pedig az azonosan hamis predikátum. Ekkor a bal oldal azt mondja, hogy létezik egy olyan objektum, amely ha B-kapcsolatban áll y-nal, akkor $x = y$. Viszont B azonosan hamis, ezért az implikáció mindig igaz, így a bal oldal annyit mond, hogy létezik olyan objektum, melyre igaz.

Szándékosan ért véget az előző mondat. Hasonlóan látható, hogy a jobb oldal azt mondja, hogy bármely objektum esetén hamis. Ha létezik egy objektum, amelyre igaz, akkor ebből nem következhet az, hogy minden objektumra hamis. Így ezen interpretáció esetén bármely „kiértékelés” esetén hamis értéket kapunk.

Előfordulhatnak olyan feladatok, melyekben a következő egyszerű ekvivalenciák ismerete is segíthet.

18. Tétel. *Tetszőleges F és G formula esetén*

- $(\forall x)\,(\forall y)\,F \equiv (\forall y)\,(\forall x)\,F$,
- $(\exists x)\,(\exists y)\,F \equiv (\exists y)\,(\exists x)\,F$,
- $(\forall x)\,F \equiv \neg\,(\exists x)\,(\neg F)$,
- $(\exists x)\,F \equiv \neg\,(\forall x)\,(\neg F)$,
- $(\forall x)\,(F \wedge G) \equiv (\forall x)\,F \wedge (\forall x)\,G$,
- $(\exists x)\,(F \vee G) \equiv (\exists x)\,F \vee (\exists x)\,G$.

5. Informatikai vonatkozások

- Bonyolultságelmélet kurzus: polinomiális hierarchia, földrajzi játék, kvantifikált Boole-formula, $\mathcal{PSPACE}$ problémák.
- Logika és informatikai alkalmazásai kurzus:
  - Az ítéletlogika és predikátumlogika kiterjesztése másodrendű logikára.
  - Logikai programozás és PROLOG nyelv (levezetések).
  - Helyesség, teljesség, eldönthetőség (lásd Bonyolultságelmélet kurzus).
- Bizonyítás elmélet.
- Modell elmélet.
- Rezolúciós kalkulus, automatikus tételbizonyítás.
- Mesterséges intelligencia.
- Számítógépes nyelvészet, például beszédfelismerés.