Ítéletkalkulus

Logikai alapfogalmak, műveletek, formalizálás,
logikai ekvivalencia, teljes diszjunktív normálforma, tautológia.

1. Bevezető

A matematikai logikában az állításoknak nem a tényleges jelentésével, hanem a szerkezetével, igazságértékével és gondolatmenetének helyességével foglalkozunk. Mi ezen kurzus keretei között csak kétértékű logikával foglalkozunk (igaz-hamis), de többértékű logika is értelmezhető. Például vessünk egy pillantást a következő kijelentésekre.

(1) Ez a mondat hamis.
(2) Minden 2-nél nagyobb páros egész szám felírható két prímszám összegeként.
(3) Minden kétfejű ló piros.

Az első kijelentés ellentmondás, tehát nem lehet sem igaz, sem hamis, gondoljunk bele. A második egy híres sejtés, erről pedig egyszerűen nem tudjuk megmondani, hogy igaz-e, vagy hamis. A harmadik kijelentés pedig azért érdekes, mert a kétértékű logika szerint igaznak kellene lennie, mert a tagadása hamis (van olyan kétfejű ló, ami nem piros?), de ezt is úgy szoktuk elintézni, hogy logikai értéke eldönthetetlen. Többek között az informatikában alkalmazzák a szintén többértékű Fuzzy-logikát, amely nem csak a szokásos 0-1 értékeket veheti fel, hanem köztes értékeket is. Ezáltal az objektumok több csoportba sorolhatók, és a gépek jobban irányíthatók. Mi ilyenekkel nem foglalkozunk, helyette a matematikai logika legalapvetőbb részét nézzük át.

2. Ítéletkalkulus

1. Definíció. Az **ítélet** olyan állítás, amelynek igazságértéke van (igaz vagy hamis). Jelölésük: $A, B, C, \ldots$

Nem ítéletek a következők: felkiáltások, felszólítások, kérdő mondatok, ...

Hasonlóan, mint a hétköznapi nyelvben is, az ítéletek bizonyos módon összekapcsolhatók, és így új összetett ítéleteket kaphatunk. Nézzük meg milyen kapcsolatban állhatnak egymással az ítéletek, illetve pontosabban milyen művelettel kapcsolhatók össze az ítéletek?

2. Definíció. Ha A és B két ítélet, akkor értelmezzük az alábbi műveleteket.

- **Negáció**: $\neg A$
  „nem A” - Így fejezzük ki a logikai kapcsolatot szavakkal.
  C-ben, Java-ban: !
- **Konjunkció**: $A \wedge B$
  „A és B”: Nem minden „és” konjunkció, gondoljunk például a felsorolásra. Viszont „és” helyett állhat a „DE” szó, például „Szeretem a dimatot, de utálom a Kalkulust.”
  C-ben, Java-ban: &&
- **Diszjunkció**: $A \vee B$
  „A vagy B”: vagy A, vagy B, vagy mindkettő.
  C-ben, Java-ban: ||
  Fontos: NEM kizáró vagy! Ezen a kurzuson nincs kizáró vagy.
- **Implikáció**: $A \rightarrow B$
  „Ha A, akkor B.” „Csak akkor A, ha B.” „A-ból következik B.” „B-nek elegendő feltétele A.” „A-nak szükséges feltétele B.”
- **Ekvivalencia**: $A \leftrightarrow B$
  „Akkor és csak akkor A, ha B.” „Pontosan akkor A, ha B.” „A-nak szükséges és elégséges feltétele B.” „A ekvivalens B-vel.”

Ha két állítást valamilyen művelettel összefűzünk, akkor a művelet igazságtartalma természetesen függ az eredetileg összekapcsolt ítéletekétől. A következő táblázatban megtalálhatjuk, hogyan.

2.1. Igazságtáblázatok

A	$\neg A$
i	h
h	i

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i

3. Példa. Vegyük a következő két állítást.

- „Ha $2 + 2 = 5$, akkor a Hold sajtból van.”
- „Ha $2 + 2 = 5$, akkor Franciaország fővárosa Párizs.”

Mindkét állítás igaz. Azért, mert implikációval vannak összekapcsolva, és az implikáció bal oldala hamis. Ekkor maga az állítás igaz. Természetesen az nem igaz, hogy sajtból van a Hold. De ezt nem állította a mondat.

2.2. Formalizálás

A formalizálás során az állításokból matematikai jelekből álló jelsorozatokat képzünk, a fenti műveleti jelek segítségével. Az állításokat a lehető legkisebb alapegységekre kell bontani, ezek a prímítéletek.

4. Definíció. A **prímítélet** olyan ítélet, amely nem tartalmaz logikai kötőszavakat.

Formalizálásnál fontos, hogy csakis **kizárólag prímítéletek helyett vezessünk be ítéletváltozókat**. **FONTOS: A PRÍMÍTÉLET NEM TARTALMAZHAT TAGADÁST!**

5. Definíció (Formula). Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.

(1) Az ítéletváltozók mindegyike formula.
(2) Ha F és G formula, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.
(3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható a fenti 1. és 2. szabályok VÉGES sokszori alkalmazásával.

Ha jól megnézzük, akkor ez egy rekurzív definíció, ahol a rekurzió a prímítéleteknél áll meg. Informálisan a fenti definíció azt jelenti, hogy logikai műveletek segítségével, ítéletváltozókból és zárójelekből szintaktikailag helyes jelsorozatokat képzünk.
A logikai műveletek között is van precedenciasorrend: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Ezt zárójelezéssel ki lehet kerülni, és a kurzuson nem is fogjuk használni.
Nézzük meg, hogy működik a formalizálás egy konkrét példán keresztül.

6. Példa. „Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.” Formalizálás:
Prímítéletek: A – esik az eső; B – rossz kedvem van; C – elmegyek dimat gyakorlatra; D – zh-t írunk.
Formalizálva: $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$. Precedenciákat alkalmazva: $A \wedge \neg B \to (C \leftrightarrow D)$.

Valamilyen szinten a formalizálás ellentéte a részformulákra bontás. Azaz megnézzük, hogy egy formula milyen kisebb formulákból áll elő.

7. Definíció. Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulá**ja F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során.

8. Példa. Az előző példa összes részformulái a következők: A, B, $(\neg B)$, $(A \wedge (\neg B))$, C, D, $(C \leftrightarrow D)$, $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$.

2.3. Kiértékelés, logikai ekvivalencia

Ebben a fejezetben már el is felejthetjük, hogy egy adott formula akár jelenthet is valamit. A matematikai logikának az a lényege, hogy a formulák a jelentésük nélkül is vizsgálhatóak legyenek. Így például függetlenül mit jelent egy formulában az A változó, az biztos, hogy vagy igaz, vagy hamis.

9. Definíció. A **kiértékelés** az a művelet, amikor a változók helyére igaz vagy hamis értéket helyettesítünk. A kiértékelés végeredménye egy igazságérték.

10. Példa. Legyen adott a következő formula: $A \to ((\neg B) \vee C)$. Számoljuk ki a formula azon kiértékelését, melyben A és C igaz, B pedig hamis.

A	B	C	$(\neg B)$	$((\neg B) \vee C)$	$A \to ((\neg B) \vee C)$
i	h	i	$\neg h = i$	$(i \vee i) = i$	$i \to i = i$

Elképzelhető, hogy ugyanazt a jelentéstartalmat két különböző formulával is le tudjuk írni. Ezek a logikailag ekvivalens formulák.

11. Definíció. Az ítéletkalkulus F és G formulája **logikailag ekvivalens**, ha értékük bármely kiértékelésnél megegyezik. Jelölésben: $F \equiv G$.

Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy mindkét formulára felírjuk az igazságtáblázatot, és összenézzük a két formula összes kiértékelését, és ha mindegyik megegyezik, akkor ekvivalensek. Lehetséges, hogy egy nagyon hosszú logikai formulához található egy sokkal rövidebb formula, mellyel logikailag ekvivalens. Ekkor minden további nélkül áttérhetünk a rövidebb formula vizsgálatára.

12. Tétel. *Bármely A és B formulák esetén*

$$A \to B \equiv \neg A \vee B \quad \textit{és} \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A).$$

Az előző tételnek köszönhető, hogy az $\leftrightarrow$ és $\to$ jelek átírhatók a $\wedge, \vee, \neg$ jelek segítségével. Jogosan merül fel a kérdés, hogy akkor miért használjuk őket? (A C-ben és a JAVA-ban sincsenek beépítve.)

13. Példa. Ekvivalens-e a következő két formula: $F = \neg(A \to B)$, $G = A \wedge (\neg B)$.

A	B	$(A \to B)$	$F = \neg(A \to B)$	$(\neg B)$	$G = A \wedge (\neg B)$
i	i	i	h	h	$i \wedge h = h$
i	h	h	i	i	$i \wedge i = i$
h	i	i	h	h	$h \wedge h = h$
h	h	i	h	i	$h \wedge i = h$

Mivel az F oszlopa és G oszlopa minden sorban megegyező értéket vesz fel, ezért logikailag ekvivalensek.

14. Példa. Az utolsó oldalon összegyűjtöttük a legfontosabb ekvivalenciákat, amelyek mindegyike bizonyítható az előző példában mutatott módon. Nem kell mindegyiket fejből tudni, de mindegyikről elvárt az igazolása.

2.4. Diszjunktív normálforma

A 12. Tétel használatával bármely formulából ki tudjuk küszöbölni az ekvivalencia és implikáció jeleket. Ebben a fejezetben egy olyan speciális formulatípusról lesz szó, mely mind matematikailag, mind informatikailag könnyen vizsgálható. (A számítógép nem rendelkezik beépített ekvivalencia és implikáció jelekkel, így hasznos lenne algoritmus, mellyel ezek kiküszöbölhetők egy formulából.)

15. Definíció. Egy formula **diszjunktív normálforma**, ha $P_1 \vee \ldots \vee P_k$ alakú, ahol minden P_i ítéletváltozók és negáltjaik konjunkciója oly módon, hogy mindegyik változó minden P_i-ben legfeljebb 1-szer szerepel.

16. Definíció. Ha egy n-változós diszjunktív normálforma minden P_i-jében mind az n darab változó szerepel, akkor **teljes diszjunktív normálformá**ról beszélünk.

A definícióknál sokkal érthetőbben be lehet mutatni példán keresztül.

17. Példa. A következő formulák diszjunktív normálformák:

- $(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ – ha az ítéletváltozók A_1, A_2, A_3 akkor ez még teljes is ($k = 2$, $n \geq 3$).
- $A_1 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ – ez nyilván nem teljes ($k = 2$, $n \geq 2$).
- $A_1 \vee A_2$ – ez sem teljes ($k = 2$, $n \geq 2$).
- $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3$ – ha az ítéletváltozók A_1, A_2, A_3 akkor ez még teljes is ($k = 1$, $n \geq 3$).

18. Tétel. *Tetszőleges F formulához létezik olyan teljes diszjunktív normálforma, amely F-fel logikailag ekvivalens.*

Ez egy nagyon fontos tétel, azonban semmit nem mond arról, hogyan keressük meg ezt a teljes diszjunktív normálformát. A módszer a következő.

(1) Felírjuk F igazságtáblázatát.
(2) A definícióban szereplő P_i-k azon sorokat reprezentálják, ahol F logikai értéke igaz.
(3) Minden sorhoz a megfelelő P_i-t úgy kapjuk, hogy azon változókat negáljuk, ahol hamis érték szerepel, és vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.

19. Példa. Írjuk fel az $(A \vee B) \rightarrow (\neg A)$ formula teljes diszjunktív normálformáját.

A	B	$(A \vee B)$	$(\neg A)$	$(A \vee B) \rightarrow (\neg A)$	
i	i	i	h	$i \rightarrow h = h$	
i	h	i	h	$i \rightarrow h = h$	
h	i	i	i	$i \rightarrow i = i$	$\Leftarrow$
h	h	h	i	$h \rightarrow i = i$	$\Leftarrow$

$$(A \vee B) \rightarrow (\neg A) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Természetesen az is egy módszer, hogy a $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ jeleket egyesével átírjuk, azután az így kapott formulát megpróbáljuk a megfelelő formára pofozni az ismert ekvivalenciák segítségével. Ez szebb az előbb említett módszernél, viszont az előző talán algoritmikusabb.

2.5. Tautológia

Ebben a fejezetben egy speciális formuláról lesz szó. Alapvetően egy formula bonyolultságát nem feltétlen a hosszával tudjuk mérni, mert előfordulhat, hogy egy sokkal rövidebbel ekvivalens. Sőt az is előfordulhat, hogy minden kiértékelésre egyforma.

20. Definíció. Egy formula **tautológia**, ha minden kiértékelésre igaz.

A definíció szerint könnyen ellenőrizhető, hogy egy formula tautológia-e, csak fel kell írni az igazságtáblázatát, és megnézni, hogy a végén mindenhol igaz érték jön-e ki.

21. Példa. Nézzük meg, hogy az $(A \wedge (A \to B)) \to B$ formula tautológia-e.

A	B	$(A \to B)$	$(A \wedge (A \to B))$	$(A \wedge (A \to B)) \to B$
i	i	i	$i \wedge i = i$	$i \to i = i$
i	h	h	$i \wedge h = h$	$h \to h = i$
h	i	i	$h \wedge i = h$	$h \to i = i$
h	h	i	$h \wedge i = h$	$h \to h = i$

Minden kiértékelésre igaz a formula, tehát $(A \wedge (A \to B)) \to B$ tautológia.

Tautológiagyűjtemény

(I) $\to$, $\leftrightarrow$ kifejezése a többi művelettel:

(1) $$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A),$$

(2) $$A \to B \equiv (\neg A) \vee B.$$

(II) $\wedge$, $\vee$ alaptulajdonságai:

(3)	$A \wedge A \equiv A,$	$A \vee A \equiv A,$	(idempotencia)
(4)	$A \wedge B \equiv B \wedge A,$	$A \vee B \equiv B \vee A,$	(kommutativitás)
(5)	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C),$	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C),$	(asszociativitás)
(6)	$(A \vee B) \wedge A \equiv A,$	$(A \wedge B) \vee A \equiv A,$	(abszorptivitás)
(7)	$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C),$	$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C).$	(disztributivitás)

(III) $\wedge$, $\vee$, $\neg$ közötti összefüggések:

(8)	$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B),$	$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B),$	(De Morgan szabályok)
(9)	$\neg(\neg A) \equiv A,$		
(10)	$A \wedge (\neg A) \equiv B \wedge (\neg B),$	$A \vee (\neg A) \equiv B \vee (\neg B),$	
(11)	$A \wedge \big(B \vee (\neg B)\big) \equiv A,$	$A \vee \big(B \vee (\neg B)\big) \equiv B \vee (\neg B),$	
(12)	$A \wedge \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv B \wedge (\neg B),$	$A \vee \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv A.$	

(IV) $\to$-t és $\leftrightarrow$-t tartalmazó logikai ekvivalenciák:

(13)	$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A,$	(kommutativitás)
(14)	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C),$	(asszociativitás)
(15)	$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A),$	
(16)	$(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv (A \vee B) \to C,$	
(17)	$(A \to B) \wedge (A \to C) \equiv A \to (B \wedge C),$	
(18)	$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C,$	
(19)	$A \to \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv \neg A.$	

(V) Tautológiák:

(20) $$A \to A \ \big(\equiv A \vee (\neg A)\big),$$

(21) $$\big(A \wedge (A \to B)\big) \to B,$$

(22) $$\big((\neg B) \wedge (A \to B)\big) \to (\neg A),$$

(23) $$\big((\neg A) \wedge (A \vee B)\big) \to B,$$

(24) $$A \to \big(B \to (A \wedge B)\big),$$

(25) $$(A \wedge B) \to A,$$

(26) $$A \to (A \vee B),$$

(27) $$\big((A \to B) \wedge (B \to C)\big) \to (A \to C),$$

(28) $$(A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big),$$

(29) $$(A \to B) \to \big((A \wedge C) \to (B \wedge C)\big),$$

(30) $$(A \to B) \to \big((A \vee C) \to (B \vee C)\big),$$

(31) $$\big((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)\big) \to (A \leftrightarrow C),$$

továbbá

(32) $$(A \leftrightarrow B) \to \big((A * C) \leftrightarrow (B * C)\big),$$

(33) $$(A \leftrightarrow B) \to \big((C * A) \leftrightarrow (C * B)\big),$$

ahol $*$ a $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ logikai műveletek bármelyike lehet.

Az (V) tautológiák, valamint az egyes $F \equiv G$ alapvető logikai ekvivalenciákból származtatott $F \leftrightarrow G$, $F \to G$ és $G \to F$ alakú tautológiák összességét nevezzük tautológiagyűjteménynek.