

KOMPLEX SZÁMOK

Komplex számok és alakjaik,
számolás komplex számokkal.

1. Komplex számok

A komplex számokra a valós számok kiterjesztéseként van szükség. Ugyanis már középiskolában előkerülnek olyan másodfokú egyenletek, melyeknek a valós számok között nincs megoldása. Felmerülhet tehát a kérdés, hogyan kell a valós számokat kiterjeszteni úgy, hogy a másodfokú egyenleteknek mindig legyen megoldása, de a valós számoknak az eddig megismert tulajdonságai az új számok között is érvényesek maradjanak. A komplex számok használata többek között ezt a problémát oldja meg.

1. Definíció. A **komplex számok** halmazát \mathbb{C} -vel jelöljük, és $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$ egy komplex szám. Ekkor a z **kanonikus alakja**

$$z = a + b \cdot i.$$

A z komplex szám **trigonometrikus alakja**

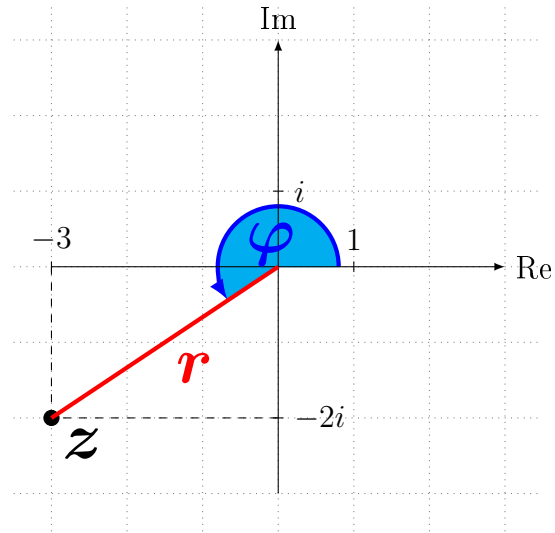
$$z = r (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)),$$

ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\varphi = \arg(z)$ az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül úgy, hogy átmenjen a z -nek megfelelő ponton.

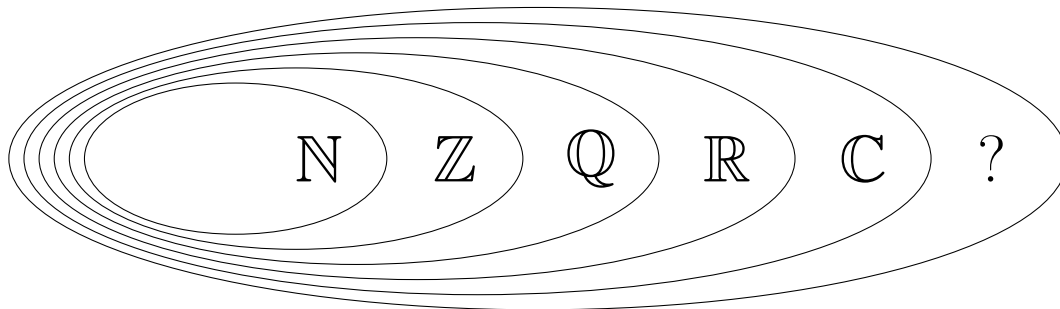
3. Példa. $(2, 2) = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4})$

A kanonikus alakban szereplő i egy kitüntetett komplex szám.

4. Definíció. A $z = (a, b)$ komplex szám $z = a + bi$ kanonikus alakjában szereplő a valós számot z **valós részének**, b valós számot z **képzetes részének** nevezzük. Más jelöléssel $z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z)$. Az i a **képzetes egység**. Az i olyan komplex szám, amelynek a négyzete -1 , azaz $i^2 = -1$.



Az előbbi definíciókból látható, hogy ez az új számfogalom valóban a valós számok kiterjesztéseként értelmezhető. Ugyanis minden r valós szám egy $(r, 0)$ alakú komplex számnak felel meg, azaz olyan komplex számnak, melynek a képzetes része nulla. Az ismert számhalmazok viszonyát a következő Venn-diagram mutatja. A kurzus keretében nem tárgyaljuk, hogy miként bővíthetők a komplex számok, ha egyáltalán lehetséges ilyen bővítés.



1. ábra.

Ha már számoknak nevezzük a komplex számokat, akkor jogosan elvárt a részünkről, hogy számolni is tudjunk velük. A következőben definiáljuk, hogyan végezhetjük el a komplex számok között a jól ismert műveleteket. (Természetesen ezt valahogy úgy kell megtenni, hogy a valós számokon ugyanaz legyen a művelete eredménye.)

5. Definíció. Legyenek z_1 és z_2 a következő kanonikus alakú komplex számok:

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di.$$

Ekkor definiálhatjuk a következő **műveleteket**.

- *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- *Ellentett:* $-z_1 = -a - bi$.
- *Kivonás:* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i$.
- *Szorzás:* $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- *Konjugált:* $\bar{z}_1 = a - bi$.
- *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- *Osztás:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

A definícióban látható, hogy komplex számok kanonikus alakjával pontosan úgy számolunk, mint az algebrai kifejezésekkel. Tehát a képzetes egységre gondolhatunk úgy, mint egy változó, de fontos, hogy ki kell használnunk az i azon tulajdonságát, mely szerint $i^2 = -1$.

Tehát ha a képzetes egységnek egy magasabb hatványával találkozunk, akkor fel kell használnunk az előbb említett tulajdonságot, mert egy kanonikus alakban nem szerepelhet i -nek magasabb hatványa. A képzetes egység minden magasabb hatványa átírható az $1, -1, i, -i$ komplex számok valamelyikére.

6. Példa.

- $i^{221} = i^{220} \cdot i = (i^2)^{110} \cdot i = (-1)^{110} \cdot i = 1 \cdot i = i.$
- $i^{43} = i^{42} \cdot i = (i^2)^{21} \cdot i = (-1)^{21} \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$
- $i^{1262} = (i^2)^{631} = (-1)^{631} = -1.$

A következő példában bemutatjuk, hogyan történik a fent definiált műveletek elvégzése adott komplex számok esetén.

7. Példa. $z_1 = (1, -1), z_2 = (-4, 5)$

- **Kanonikus alak:** $z_1 = 1 - i, z_2 = -4 + 5i.$
- **Trigonometrikus alak:** $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right).$ (A z_2 trigonometrikus alakja nem szép, ugyanis nem látjuk a nevezetes szöveget.)
- **Műveletek:**
 - **Összeadás:** $z_1 + z_2 = (1 - 4) + (-1 + 5)i = -3 + 4i.$
 - **Ellentett:** $-z_2 = 4 - 5i.$
 - **Kivonás:** $z_2 - z_1 = (-4 - 1) + (5 - (-1))i = -5 + 6i.$
 - **Szorzás:** $z_1 z_2 = (1 - i)(-4 + 5i) = -4 + 5i + 4i + 5 = 1 + 9i.$
 - **Konjugált:** $\bar{z}_1 = 1 + i.$
 - **Abszolútérték:** $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$
 - **Osztás:**

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4 + 5i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{-4 - 4i + 5i - 5}{1^2 - i^2} = \frac{-9 + i}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}i.$$

8. *Megjegyzés.* Fontos, hogy a végeredményt valamelyik ismert alakban adjuk meg. A $\frac{3}{i}$ hiába rövid, nem kanonikus (vagy trigonometrikus) alakban van. El kell végezni ezt az osztást, és a végeredmény $-3i$.

9. Tétel. Ha $z_1 = a_1 + b_1i$ és $z_2 = a_2 + b_2i$ két komplex szám, akkor $z_1 = z_2$ pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

A komplex számok trigonometrikus alakja megengedi, hogy geometriai szempontból vizsgáljuk a komplex számokat. A következő tételben összefoglaljuk, hogyan történik a fentebb már definiált műveletek elvégzése trigonometrikus alak esetén.

10. Tétel. Legyenek z_1 és z_2 a következő trigonometrikus alakú komplex számok:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), w = s(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Ekkor

- $z \cdot w = rs (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$;
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{s} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$;
- $\bar{z} = r (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$;
- tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ számra $z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$;
- ha $z \neq 0$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n}))$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, azaz minden nemnulla komplex számnak pontosan n darab n -edik gyöke van.

A tételben szereplő állítások geometriai jelentőséggel bírnak. Minden komplex számnak a Gauss-féle számsíkon megfelel egy pont. Például egy komplex szám konjugáltjának megfelelő pont, az eredetinek a valós tengelyre vett tükörképe. Egy komplex szám n -edik gyökei, pedig egy meghatározott sugarú körvonalon vannak és egy szabályos n -szöget határoznak meg.

11. Példa. Legyen $z = (\sqrt{3}, 1)$ és $w = (1, -1)$ két komplex szám.

- $z = \sqrt{3} + i = 2 (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$, $w = 1 - i = \sqrt{2} (\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$;
- $zw = 2\sqrt{2} (\cos (\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}) + i \sin (\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4})) = 2\sqrt{2} (\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12})$;
- $\frac{z}{w} = \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos (\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}) + i \sin (\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4})) = \sqrt{2} (\cos (-\frac{19\pi}{12}) + i \sin (-\frac{19\pi}{12}))$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} (\cos (-\frac{\pi}{6}) + i \sin (-\frac{\pi}{6}))$;
- $\bar{w} = \sqrt{2} (\cos (-\frac{7\pi}{4}) + i \sin (-\frac{7\pi}{4}))$;
- $w^6 = (\sqrt{2})^6 (\cos (6 \cdot \frac{7\pi}{4}) + i \sin (6 \cdot \frac{7\pi}{4})) = 8 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 8i$;
- $\sqrt[3]{z} = x$: $x_1 = \sqrt[3]{2} (\cos (\frac{\pi}{6}/3) + i \sin (\frac{\pi}{6}/3)) = \sqrt[3]{2} (\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18})$,
 $x_2 = \sqrt[3]{2} (\cos ((\frac{\pi}{6} + 2\pi)/3) + i \sin ((\frac{\pi}{6} + 2\pi)/3)) = \sqrt[3]{2} (\cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18})$,
 $x_3 = \sqrt[3]{2} (\cos ((\frac{\pi}{6} + 4\pi)/3) + i \sin ((\frac{\pi}{6} + 4\pi)/3)) = \sqrt[3]{2} (\cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18})$.

2. Alkalmazások

- Komplex számok fizikai alkalmazásai: váltóáramú körök leírása, rezgések és hullámok leírása, komplex idő- és amplitúdófüggvény, kvantummechanikai számítások.
- Vegyük a következő rekurzív sorozatot: $z_0 = 0$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Azon c komplex számok, melyek esetén a sorozat korlátos a Mandelbrot-halmaz elemei, ami talán a legismertebb fraktálalakzat.
- Hogy rajzoljunk egy szabályos n -szöget a képernyőre? Rögzítsünk egy pontot, és a megadott képlettel számoljuk ki a rögzített pont által reprezentált komplex szám n -edik gyökeit (illetve csak azok közelítő értékeit). Így megkapjuk az n -szög összes csúcsát.
- Komplex számokkal működő Fourier-transzformációt használnak a képfeldolgozás különböző területein, például az arcfelismerésben, vagy a tömörítésben.
- A Wolfram Alpha ingyenes, internetes szoftverrel a komplex számokkal történő elemi számítások könnyen elvégezhető. A <http://www.wolframalpha.com/> honlapon, vagy a

Wolfram Mathematica nevű offline programban $(10+4i)/((2-3i)*(-9-i))$ formában lehet megadni komplex számokat és műveleteket. Szinte mindegyik komputeralgebrai szoftver képes a komplex számokat kezelni, például a Maple és a MatLab is.