# LEKÉPEZÉSEK

Leképezések tulajdonságai. Számosságok.

## 1. Leképezések tulajdonságai

A továbbiakban legyen $A$ és $B$ két tetszőleges halmaz. Idézzünk fel néhány definíciót.

**1. Definíció** (Emlékeztető)**. Reláció**knak nevezzük az $A \times A$ részhalmazait, azaz $\sigma$ reláció, ha $\sigma \subseteq A \times A\,(= A^2)$. Egy $A$-ból $B$-be menő **megfeleltetés** az $A \times B$ részhalmaza, azaz $\sigma$ egy $A \to B$ megfeleltetés, ha $\sigma \subseteq A \times B$.

Tehát a reláció egy adott halmazon belüli elemek között állít fel kapcsolatot, míg a megfeleltetés két különböző halmazt kapcsolhat össze. Egy jól ismert fogalmat fogunk most bevezetni, ami egy speciális megfeleltetés.

**2. Definíció.** Az $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést **leképezés**nek nevezzük, ha bármely $a \in A$-hoz létezik *pontosan egy* olyan $b \in B$, amelyre $(a, b) \in f$. A $b$ elemet az $a$ elem **kép**ének nevezzük, az $a$-t pedig a $b$ **ős**ének.

Ezt a fogalmat eddig talán mindenki függvény néven ismerte. Minden értelmezési tartományhoz tartozó $x$-hez tartozott egy $f(x)$ érték. Tehát az $(x, f(x))$ párok alkották a leképezést. Ugye, hogy senki sem gondolt eddig a függvényre úgy, mint rendezett számpárok halmaza? Na akkor épp itt az ideje elkezdeni.

A továbbiakban tekintsük át a leképezések legfontosabb tulajdonságait.

**3. Definíció.** Az $f : A \to B$ leképezés **injektív**, ha bármely $a_1, a_2 \in A$-ra teljesül, hogy ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$. Más szóval, különböző elemek képe különböző.

Az előző definícióban szereplő $a_1 f$ kifejezés azt jelenti, hogy az $a_1$ képe az $f$ leképezés mellett. Szándékosan nem a függvényeknél megszokott $f(a_1)$ jelölést használjuk, de azzal egyenértékű. De még egyszer szeretnénk hangsúlyozni, hogy az $f$ leképezés egy elempárokból álló halmaz, tehát az $af = b$ jelölést ekvivalens az $f(a) = b$ és $(a, b) \in f$ jelölésekkel.

**4. Definíció.** Az $f : A \to B$ leképezés **szürjektív**, ha bármely $b \in B$-hez létezik olyan $a \in A$, amelyre $f(a) = b$. Más szóval, minden $B$-beli elemnek van őse $A$-ban.

**5. Definíció.** Az $f : A \to B$ leképezés **bijektív**, ha injektív és szürjektív.

**6. Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $xf = x^2$ leképezés nem injektív, mert $(-2)f = 2f = 4$. A $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $xg = \log x$ leképezés injektív, mert a logaritmus egy szigorúan monoton növő függvény, ezért különböző elemek képe is különböző.

Továbbá az $f$ leképezés nyilvánvalóan nem szürjektív. Van olyan szám, melynek a leképezés melletti képe $-5$? Nincs, tehát nem szürjektív. (Ha a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $xf = x^2$ leképezést tekintenénk, akkor már szürjektív lenne.) A $g$ leképezés szürjektív. Tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ elem őse az $e^y$, mert $e^y \mapsto y$.

**7. Példa.** Vizsgáljuk meg a $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto |n-3| + 1$ leképezés tulajdonságait.

**Injektivitás:** Tegyük fel, hogy $|n-3| + 1 = |m-3| + 1$. Ez ekvivalens azzal, hogy $|n-3| = |m-3|$, vagyis $n-3 = \pm(m-3)$. Két eset van: $n-3 = m-3$, vagy $n-3 = 3-m$. Az első esetben azt kapjuk, hogy $n = m$, és ezt kell kapnunk, ahhoz hogy injektív legyen, de meg kell vizsgálni a másik esetet is. A második eset azzal ekvivalens, hogy $n + m = 6$, azaz $m = 6 - n$. Ez azt jelenti, hogy $ng = (6-n)g$, természetesen csak akkor, ha $6 - n \in \mathbb{N}$. De van olyan (elég) kicsi $n \in \mathbb{N}$, amelyre még $6 - n \in \mathbb{N}$, például $n = 5$. Ekkor azt kaptuk, hogy $5g = 1g$, viszont $5 \neq 1$, tehát a $g$ leképezés NEM injektív. A kapott ellenpélda ránézésre is megmondható, nem fontos végig levezetni.

8. *Megjegyzés.* Ha már egy ELLENPÉLDÁT találunk, akkor kész vagyunk, egyetlen ellenpélda is bizonyítja, hogy a tulajdonság nem áll fenn.

9. *Megjegyzés.* A tulajdonság vizsgálatában segíthet az ábrázolás és a vízszintes vonal teszt.

**Szürjektivitás:** Rögzítünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{N}$ számot, és keresünk hozzá egy megfelelő $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $ng = y$. Keressük az $n$ számot a következő egyenlet megoldásaként: $|n-3| + 1 = y$. Ez azzal ekvivalens, hogy $|n-3| = y - 1$. Nekünk nem az összes olyan szám kell, aminek a képe $y$, elég csak egyet találnunk, ezért elhagyhatjuk az abszolútérték jelet. Ekkor azt kapjuk, hogy $n - 3 = y - 1$, azaz $n = y + 2$. Mit kaptunk? Azt hogy bármely $y \in \mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $(y+2)g = y$. Tehát minden $y$-hoz található ős, ezért a leképezés szürjektív.

10. *Megjegyzés.* A tulajdonság vizsgálatában segíthet az ábrázolás és a vízszintes vonal teszt.

**Bijektivitás:** A fenti $g$ leképezés nyilván NEM bijektív, mivel nem injektív.

# 2. Számosságok

Ebben a fejezetben egy olyan fogalomkört veszünk górcső alá, ami a mindennapi alkalmazások során elég kevéssé jelenik meg. Ezek a végtelen halmazok. (Vegyük észre, hogy a fizikusok jelenlegi álláspontja alapján véges sok atom van a világegyetemben. A számítógép véges sok adat tárolására képes. Ettől függetlenül a végtelen halmazok vizsgálata elméleti szinten kikerülhetetlen, és egyébként meg érdekes is.) Végtelen halmazok esetén az elemszám helyett a számosság fogalmat használjuk. Minden halmaznak van számossága, ami véges halmaz esetén természetesen megegyezik a jól ismert elemszám fogalommal.

**11. Példa.** Az $A = \{0, a\}$ halmaz véges, elemszáma kettő, azaz $|A| = 2$.

Találkoztunk már végtelen számosságú halmazokkal. Ilyen volt például az egész számok halmaza, vagy éppen a valós számok halmaza. Eddig nem nagyon gondolkoztunk azon, hogy tulajdonképpen sehol nem tudjuk az egész halmazt realizálni. (Ezt ne is tegyük, mert gyakorlatban lehetetlen.) Ami fontosabb kérdés, hogy mindkettőre azt mondjuk végtelen a számossága. De ugyanannyi, vagy nem? Esetleg van „kisebb" és „nagyobb" végtelen? Van. Először azonban lendüljünk túl azon a problémán, hogy két halmaz számosságát mikor tekintjük azonosnak.

Véges halmazok elemszáma pontosan akkor egyenlő, ha mindegyiknek ugyanannyi eleme van. Ez végtelen halmazok esetén is így lesz, csak nem mondhatjuk, hogy két halmaz számossága pontosan akkor egyenlő, ha számosságuk végtelen. A halmazok számosságát bijekciók segítségével tudjuk összehasonlítani, ugyanis egy bijekció tulajdonképpen párba állítja két halmaz elemeit.

**12. Definíció.** Az $A$ és $B$ halmazok **számossága egyenlő**, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.

Most már van értelme bizonyos számosságokat elnevezni, mert meg tudjuk mondani, hogy egy halmaz számossága mikor egyezik meg ezzel.

**13. Definíció.** Az $\mathbb{N}$ halmaz számosságát **megszámlálhatóan végtelen**nek nevezzük, és $\aleph_0$-lal jelöljük, azaz $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

**14. Definíció.** Az $\mathbb{R}$ halmaz számosságát **kontinuum számosság**nak nevezzük, és $c$-vel jelöljük, azaz $|\mathbb{R}| = c$.

**15. Példa.** A $B = \{\text{pozitív páros számok}\}$ halmaz végtelen számossága $|B| = \aleph_0$. Az $f : \mathbb{N} \to B,\ xf = 2x$ leképezés bijekció az $\mathbb{N}$ és $B$ halmazok között, így számosságuk megegyezik.

Első olvasásra kicsit meglepő lehetett az előző példa. Pontosan „fele annyi" páros szám van, mint pozitív egész szám. Mégis megegyezik a számosságuk? (Ugye, milyen érdekes?)

Vizsgáljuk meg akkor, hogy vannak-e különböző végtelenek? (Eddig csak két elnevezésünk van: $\aleph_0$ és $c$. Azt még nem tudjuk, hogy különbözőek.) Be kell vezetni egy relációt, ami két számosságot megkülönböztet nagyság szerint.

**16. Definíció.** Az $A$ halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő**, mint a $B$ halmaz számossága, azaz $|A| \leq |B|$ , ha létezik $A \to B$ injektív leképezés.

Bármennyire is absztraktnak tűnik, ez van véges esetben is. Ha $|A| \leq |B|$, akkor megpróbálunk minden $A$-beli elemhez hozzárendelni egy $B$-beli elemet. És azt tapasztaljuk, hogy $B$-ben van még párosítatlan elem ($|A| < |B|$) vagy nincs ($|A| = |B|$).

**17. Tétel.** *Ha $A$ egy tetszőleges halmaz akkor $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. (Ez végtelen $A$ halmazokra is igaz, azonban ennek megértéséhez már magasabb fokú halmazelméleti ismeretekre lenne szükség, ami nem tartozik a tantárgy keretei közé.)*

**18. Példa.** Mivel $|\emptyset| = 0$, így $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$ és $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))| = 8$.

Amiért felemlegettük a hatványhalmazt, az a következő állítás.

**19. Tétel.** *Tetszőleges $A$ halmaz esetén $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$, sőt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

**20. Tétel.** $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Tehát vannak kisebb-nagyobb számosságok. Legnagyobb nincs, mert ha lenne, akkor a hatványhalmaza nagyobb számosságú lenne. A legkisebb számosságú halmaz *az* üres halmaz.

**21. Állítás.** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{T}| = c$.

**22. Tétel.** *Az $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.*

Mint említettük a bevezetett $\leq$ egy reláció. Tehát vizsgálhatjuk a tulajdonságait, mint reláció.

**23. Tétel.**

*(1) (Dichotomia) Tetszőleges $A$ és $B$ halmazok esetén$|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$.*
*(2) (Antiszimmetria) Tetszőleges $A$ és $B$ halmazok esetén ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.*

A gyakorlaton főleg az alábbi fontos tételt fogjuk masszívan használni.

**24. Tétel** (Számosságaritmetika alaptétele)**.** *Ha az $A$ és $B$ halmazok közül valamelyik végtelen számosságú, akkor*

$$|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|).$$

**25. Példa.**

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

# 3. Alkalmazások

- Egy programnyelvben a beépített véletlenszám-generátor a $[0;1]$ intervallumból ad vissza értéket (egyenletes eloszlással). Nekünk a dobókocka imitálására van szükségünk. A feladat egy leképezéssel könnyen megoldható, ahol a $[0;1]$ intervallum számait kell leképezni az $\{1,2,3,4,5,6\}$ számhalmazra. (A leképzés itt egy programozástechnikai függvény.)

- Digitalizálás: egy analóg jel digitalizálásakor végtelen sok különböző állapotról kell leképeznünk véges állapothalmazra, mivel a számítógép diszkrét működésű. Például a szemmel érzékelhető színeket (természetesen annak csak egy sokkal „kisebb" méretű részhalmazát) RGB-kóddal jeleníthetjük meg a számítógépen. (A $\left(\pi, \sqrt{2}, e\right)$ színt meg tudjuk jeleníteni? Miért igen, vagy nem? Milyen tulajdonságú akkor az „RGB-leképezés"?)
- Kódolás (titkosítás): olyan leképezés, mellyel egy üzenet képe csak a leképezés inverzével együtt olvasható, azaz a kódoló és dekódoló leképezés szorzata az identikus leképezés. Nem kell a leképezésnek bijektívnek lennie, de az injektivitást meg kell követelni.
- Programozás: szintaktikai és szemantikai szabályok szerint leképezzük a végrehajtandó feladatot egy adott programnyelvre. (A compiler természetes még ezt is tovább képezi alacsonyabb szintű programokra.) Itt a leképezés inkább csak köznyelvileg értendő, ugyanis a leképezést a programozó végzi, miközben a programot írja. Ez nem matematikai leképezés, de bizonyos szinten ugyanarról van szó.
- Maga a nyelv is leképezés, a gondolatainkat képezzük le különböző nyelvi eszközökre. Ez a leképezés nem injektív, például a „fog" szó bizonyítja ezt. Nyilván nem is szürjektív. Van bármi jelentése a „jksfdgűhlk" szónak?