Relációk

Descartes-szorzat. Relációk szorzata, inverze. Relációk tulajdonságai.
Ekvivalenciareláció, osztályozás. Részbenrendezés, Hasse-diagram.

1. Descartes-szorzat

A kurzuson már megtanultuk mik a halmazok és milyen műveleteket tudunk végrehajtani velük. Az eddigi műveletek megőrizték az objektumok típusát. Például az $A \cup B$ halmaz elemei az A, B halmazok valamelyikéből kerülnek ki. A következőben bevezetett művelet (Descartes-szorzat) eredménye egy olyan halmaz lesz, melynek elemei rendezett objektumpárok.

1. Definíció. Tetszőleges két a, b objektum esetén értelmezhetjük az (a, b) elempár fogalmát. **Rendezett elempár**ról beszélünk, ha (a_1, b_1) pontosan akkor egyenlő (a_2, b_2)-vel, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$, azaz fontos a két elem sorrendje.

2. Definíció (Descartes-szorzat)**.** Legyen A, B két tetszőleges halmaz. Ekkor az A és a B halmaz **Descartes-szorzat**a az a halmaz, mely azokat a rendezett elempárokat tartalmazza, amiknek az első komponense A-nak, második komponense B-nek eleme. Jelölés: $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) :\ a \in A,\ b \in B\}$$

3. Példa.

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{2, 3\}, \quad A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

4. Definíció (Descartes-négyzet)**.** Legyen A egy halmaz. Ekkor az A tetszőleges halmaz **Descartes-négyzet**e az a halmaz, mely azon rendezett elempárokból áll, amiknek mindkét komponense A-nak az eleme. Jelölés: A^2.

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) :\ a \in A,\ b \in A\}$$

5. Példa.

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Ha A véges halmaz, és elemszáma m, illetve B is véges halmaz, és elemszáma n, akkor az $A \times B$ halmaz is véges és elemszáma $m \cdot n$. Ez egy egyszerű középiskolai feladatként is felfogható, és könnyen igazolható: hány különböző objektumot tehetünk az első helyre (válasz: $|A|$) és hány elemet tehetünk a második helyre (válasz: $|B|$)?

6. *Megjegyzés.* Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor $A \times B = \emptyset$.

7. *Megjegyzés.* Ha A és B két tetszőleges különböző halmaz, akkor $A \times B \neq B \times A$, tehát a Descartes-szorzat nem kommutatív. Ha $A = B$, akkor $A \times B = B \times A$.

2. Relációk

Látszólag a Descartes-szorzat csak egy újabb definíció, ami tulajdonképpen igaz is. Csak matematikailag így tehetjük precízzé a relációk bevezetését. A megfeleltetés és reláció tulajdonképpen a matematikában is bizonyos kapcsolatot fog jelenteni bizonyos dolgok között.

8. Definíció. Legyen A és B két tetszőleges halmaz. Az $A \times B$ Descartes-szorzat részhalmazait A-ból B-be menő **megfeleltetés**eknek nevezzük. Ekkor A az indulási halmaz, B pedig az érkezési halmaz.

9. Definíció. Legyen A egy halmaz. Az A^2 Descartes-négyzet részhalmazait **reláció**knak nevezzük. A relációkat általában a görög ábécé kis betűivel jelöljük.

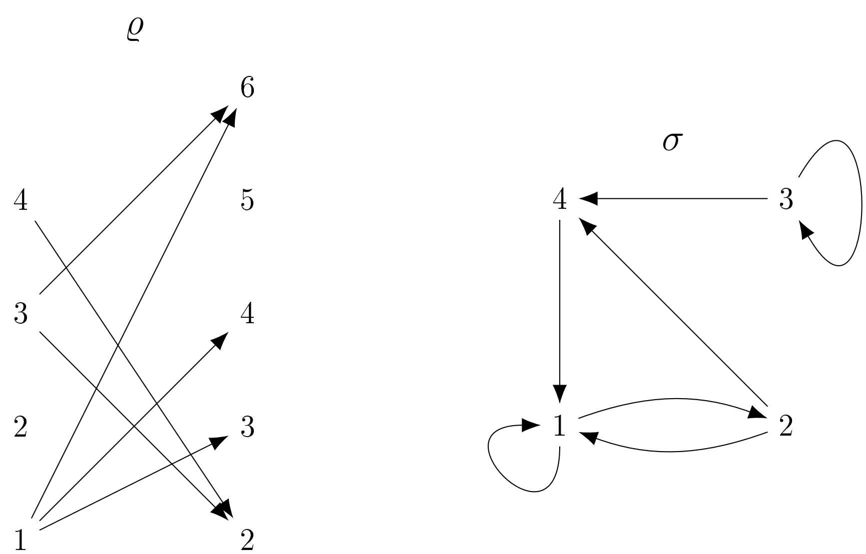
10. Példa. Vegyük az emberek halmazát (E). Látszólag az E^2 halmaznak nincs túl sok értelme. Miért is lenne mindenki a világon mindenkivel kapcsolatban? Valóban nincs. De ha mondjuk vesszük az összes (apa,fia) rendezett párt, akkor ez már egy értelmes reláció lesz az E halmazon.

11. Példa. Legyen $A = \{1,2,3,4\}$ és $B = \{2,3,4,5,6\}$ két halmaz. Ekkor például a $\varrho = \{(1,3), (1,4), (1,6), (3,2), (3,6), (4,2)\}$ egy megfeleltetés A-ból B-be, és

$$\sigma = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,4), (3,3), (3,4), (4,1)\}$$

egy reláció az A halmazon.

12. *Megjegyzés.* A megfeleltetések talán legszemléletesebb ábrázolása gráfokkal történik. A 11. Példa megfeleltetése és relációja a következő gráfokkal ábrázolhatók.

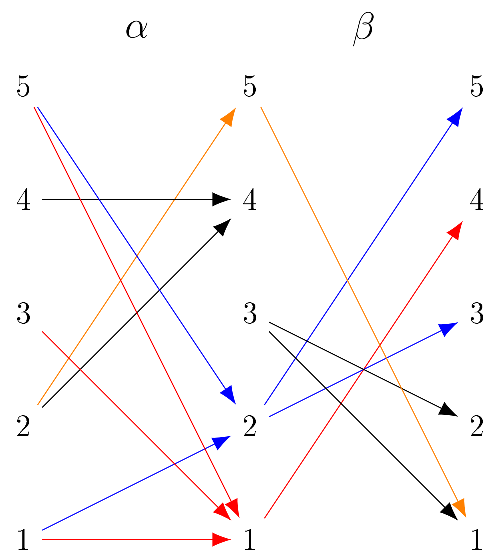


Természetesen a megfeleltetés nem ábrázolható a jobboldali módon, de a reláció ábrázolható lenne a bal oldali módon, ezt majd nemsokára fogjuk is használni.

13. Definíció. Legyen ϱ és σ két reláció az A halmazon, azaz $\varrho \subseteq A^2$ és $\sigma \subseteq A^2$. Ekkor a két **reláció szorzat**át $\varrho\sigma$-val jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\varrho\sigma = \left\{(a,c) \in A^2 : \text{ létezik } b \in A, \text{ hogy } (a,b) \in \varrho \text{ és } (b,c) \in \sigma\right\}.$$

14. Példa. Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\alpha = \{(1,1),(1,2),(2,4),(2,5),(3,1),(4,4),(5,1),(5,2)\}$ és $\beta = \{(1,4),(2,3),(2,5),(3,1),(3,2),(5,1)\}$.



Ekkor $\alpha\beta = \{(1,4),(1,5),(1,3),(2,1),(3,4),(5,4),(5,5),(5,3)\}$. Mint látható, a definícióban szereplő b köztes elem a középső oszlopból a végeredményben nem jelenik meg. Vizuálisan az a kérdés, hogy mely bal oldali elemből tudok eljutni egy középső elemen keresztül valamelyik jobb oldaliba.

15. *Megjegyzés.* Fontos, hogy a $\beta\alpha$ szorzat kiszámításához ne ugyanezt az ábrát készítsük el, hanem a bal oldali részben a β-hoz tartozó nyilakat húzzuk be, míg jobb oldalon az α-hoz tartozókat.

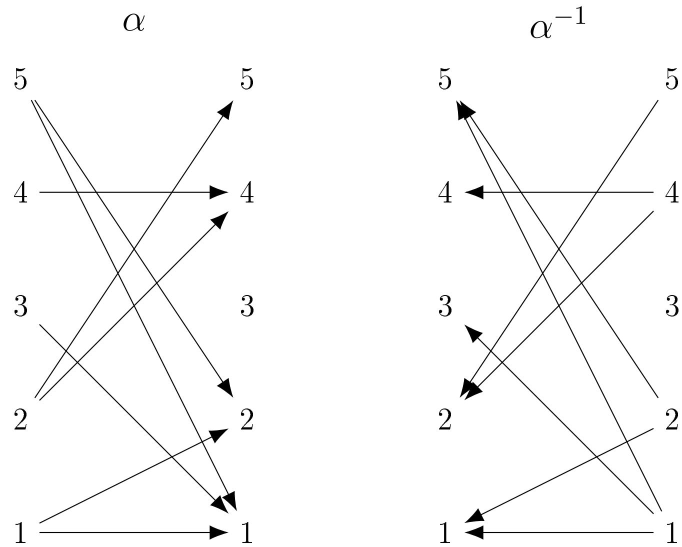
16. Definíció. Legyen σ egy reláció az A halmazon, azaz $\sigma \subseteq A^2$. Ekkor a **reláció inverzé**t σ^{-1}-gyel jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\sigma^{-1} = \left\{(a,b) \in A^2 : (b,a) \in \sigma\right\}.$$

17. Példa. Az előző példa adatait használva kiszámítható, hogy

$$\alpha^{-1} = \{(1,1),(2,1),(4,2),(5,2),(1,3),(4,4),(1,5),(2,5)\}.$$

18. *Megjegyzés.* Vizuálisan az történik, hogy az inverzben az elemek közötti nyíl megfordul.



19. *Megjegyzés.* Mivel a reláció is halmaz, ezért relációk metszetéről, uniójáról, különbségéről, szimmetrikus differenciájától is beszélhetünk, de ezeket itt nem részletezzük. Ezek úgy működnek, mint egyszerű halmazok esetén, csak itt a halmazok elemei rendezett elempárok.

20. Példa. A 14. Példa adatait használva $\alpha \cap \beta = \{(2,5),(3,1),(5,1)\}$.

3. Relációk tulajdonságai

21. Definíció. Legyen A egy tetszőleges halmaz, és a $\sigma \subseteq A^2$ tetszőleges A-n értelmezett reláció.

(1) A σ reláció **reflexív**, ha bármely $a \in A$-ra teljesül, hogy $(a, a) \in \sigma$.
Például a $\varrho =$ „ $\leq$ ” $(\subseteq \mathbb{R}^2)$ reláció reflexív, mert bármely x valós számra teljesül, hogy $(x, x) \in \varrho$, azaz $x \leq x$.

(2) A σ reláció **szimmetrikus**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$, akkor $(b, a) \in \sigma$.
Például az előbb említett ϱ reláció nem szimmetrikus, mert abból, hogy $3 \leq 4$ (azaz $(3, 4) \in \varrho$), nem következik, hogy $4 \leq 3$ (azaz $(4, 3) \in \varrho$). Az „ $=$ ” reláció már szimmetrikus.

Megjegyzés. Ha már egy ellenpéldát találunk, akkor kész vagyunk, egyetlen ellenpélda is bizonyítja, hogy a tulajdonság nem teljesül.

(3) A σ reláció **tranzitív**, ha bármely $a, b, c \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$ és $(b, c) \in \sigma$, akkor $(a, c) \in \sigma$.
Például a fenti ϱ reláció nyilván tranzitív, mert ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ is teljesül.

(4) A σ reláció **ekvivalenciareláció**, vagy röviden ekvivalencia, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív is egyszerre.

(5) A σ reláció **antiszimmetrikus**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$ és $(b, a) \in \sigma$, akkor $a = b$.
Például a fenti ϱ reláció nyilván antiszimmetrikus, mert ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x \leq y \leq x$, ami azt jelenti, hogy $x = y$.

(6) A σ reláció **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív is egyszerre.

(7) A σ reláció **dichotom**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy $(a, b) \in \sigma$ vagy $(b, a) \in \sigma$.
Például a ϱ reláció dichotom, mert bármely két valós számról el tudjuk dönteni, hogy melyik kisebb-egyenlő, mint a másik. A valós számokon értelmezett „ $<$ ” reláció már nem dichotom.

Megjegyzés. Ha egy reláció nem reflexív, akkor dichotom sem lehet. (Gondoljunk bele! A dichotomia definíciójában az a-ról és a b-ről nem tettük fel, hogy különbözőek legyenek.)

(8) A σ reláció **(teljes) rendezés**, ha részbenrendezés és dichotóm is egyszerre.

22. *Megjegyzés.* Ha egy relációt az irányított gráfjával adunk meg, akkor

- σ pontosan akkor reflexív, ha a gráf minden pontjában van hurokél;
- σ pontosan akkor tranzitív, ha teljesül az, hogy ha létezik út két pont között, akkor létezik 1 hosszú út is közöttük;
- σ pontosan akkor szimmetrikus, ha a gráf minden éle oda-vissza típusú él;
- σ pontosan akkor antiszimmetrikus, ha bármely két különböző pont között 0 vagy 1 irányban megy él;
- σ pontosan akkor dichotom, ha a gráf bármely két pontja között megy él.

23. Példa. Legyen σ a következő reláció: $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid x^2 + y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Milyen tulajdonságok teljesülnek az σ relációra?
Megoldás:

(1) *Reflexivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, x) \in \sigma$, azaz hogy $2 \mid x^2 + x^2$. Ez nyilván teljesül, mert $x^2 + x^2 = 2x^2$, ami nyilván páros, ezért minden egész szám σ-relációban áll egymással. Tehát a reláció reflexív.

(2) *Szimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(y, x) \in \sigma$. Ez nyilván teljesül, mert $(x, y) \in \sigma \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff 2 \mid y^2 + x^2 \iff (y, x) \in \sigma$, azaz σ szimmetrikus.

(3) *Tranzitivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból és $(y, z) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(x, z) \in \sigma$. Nézzük meg!
$(x, y) \in \sigma \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff x^2 + y^2 = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \iff x^2 = 2k - y^2$
$(y, z) \in \sigma \iff 2 \mid y^2 + z^2 \iff y^2 + z^2 = 2l \ (l \in \mathbb{Z}) \iff z^2 = 2l - y^2$
Behelyettesítünk: $x^2 + z^2 = 2k + 2l - 2y^2 = 2(k + l - y^2) = 2m$, ahol $m \in \mathbb{Z}$. Így megkaptuk, hogy $2 \mid x^2 + z^2$, azaz $(x, z) \in \sigma$. Tehát a reláció tranzitív.

(4) Mind a három fenti tulajdonság teljesül, ezért a reláció *ekvivalencia(reláció).*

(5) *Antiszimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból és $(y, x) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $x = y$. Rendkívül könnyen tudunk ellenpéldát találni, például $(2, 4) \in \sigma$, $(4, 2) \in \sigma$ és $2 \neq 4$.

    Megjegyzés. Nagyon kevés olyan reláció van, ami egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus is, de létezik ilyen, sőt már meg is volt említve egy ilyen reláció. Viszont az sem igaz, hogy egy relációra valamelyik mindig teljesül. Könnyen adható olyan reláció, amelyik se nem antiszimmetrikus, se nem szimmetrikus.

(6) Mivel az antiszimmetria nem teljesül, így α nem *részbenrendezés*, és ezért már *rendezés* sem lehet, de azért nézzük meg az utolsó tulajdonságot is.

(7) *Dichotomia:* Most azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$ vagy $(y, x) \in \sigma$. Nyilván egy páratlan-páros kombináció sem így, sem amúgy nincs benne a relációban, és így megint könnyen találtunk ellenpéldát (egyszerre végtelen sokat is). A reláció tehát nem dichotom.

4. Osztályozás

Ebben a fejezetben bevezetünk egy új halmazokhoz köthető fogalmat, majd megmutatjuk, hogy az ekvivalenciák halmazelméleti eszközökkel is vizsgálhatók.

24. Definíció. Legyen A egy tetszőleges halmaz. Ekkor a $\mathcal{C}$ halmazt **osztályozás**nak nevezzük, ha

(1) $\mathcal{C} \subseteq P(A)$,
(2) bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
(3) bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
(4) $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

A $\mathcal{C}$ halmaz elemeit **osztály**oknak nevezzük.

Szóban így vonható össze az előbbi négy feltétel: $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon, ha $\mathcal{C}$ az A nemüres (2) részhalmaziból áll (1), és minden A-beli elem (4) pontosan egy darab $\mathcal{C}$-beli halmaznak eleme (3). Tehát gyakorlatilag A elemeit kis (nemüres) kupacokba rendezzük. A kupac (osztály) egy halmaz az osztályozás pedig ezen kupacok (osztályok) halmaza.

25. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{3, 5\}\}$. (A színezésre egy későbbi példában lesz szükségünk.) A $\mathcal{C}$ halmaz osztályozás, mert minden A-beli elem szerepel pontosan egy osztályában, és egyik osztály sem üres.

Ekvivalenciareláció – osztályozás

26. Tétel. *Egy A halmaz feletti $\mathcal{C}$ osztályozás meghatároz egy ekvivalenciát a következő módon:*

$$\rho_{\mathcal{C}} = \left\{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C},\ hogy\ a, b \in X\right\}.$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az egy osztályban lévő elemek egymással mindenhogy relációban állnak.

27. Példa. Az előző példában szereplő osztályozáshoz felírható reláció:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 4), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}.$$

A színezés azt jelöli, hogy mely osztályokhoz mely relációbeli elemek tartoznak.

28. Tétel. *Ha ρ ekvivalencia az A halmazon, akkor az $A/\rho = \{b\varrho* : b \in A\}$ halmaz osztályozás A-n, ahol $b\rho* = \{c \in A : (b, c) \in \rho\}$.*

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy ekvivalenciarelációhoz felírható egy olyan osztályozás, amelyben az egymással relációban lévő elemek ugyanabban az osztályban vannak.

Mire jó ez? Mindig áttérhetünk ekvivalenciáról osztályozásra, illetve osztályozásról ekvivalenciára, és azzal dolgozhatunk, amelyikkel nekünk kényelmesebb.

29. Példa. Térjünk vissza a 23. Példában bemutatott σ relációra, amiről beláttuk, hogy ekvivalencia. Ekkor nyilván van egy hozzá tartozó osztályozás. Adjuk ezt meg.
Megoldás:

Keressünk egymással relációban álló számokat: $(0,2), (0,4), (0,6), (2,4), (2,6), \ldots \in \sigma$. Nyilván végtelen sok van, de az azért látszik hogy a páros számok a páros számokkal relációban vannak, ezért nyilván egy osztályban vannak. Mivel osztályozást keresünk, így a páratlan számokat is kell valahova tennünk. Könnyen rájöhetünk, hogy a páratlan számok relációban állnak a páratlan számokkal, ugyanis páratlan számok négyzete szintén páratlan, és két páratlan szám összege már páros, ezért teljesül a reláció feltétele. Így már van két osztály-jelöltünk, a páros számok, és a páratlan számok halmaza. Most már csak azt kell belátni, hogy páratlan szám nem állhat relációban páros számmal, hogy valóban két különböző osztályt kapjunk. Ez pedig könnyű, mert páros szám négyzete páros, páratlané páratlan, és egy páros és egy páratlan szám összege páratlan, ami nyilván nem osztható kettővel, így nem teljesülhet a reláció feltétele.

Tehát a keresett $\mathcal{C}_\sigma$ osztályozásnak két osztálya van, a páros és páratlan egész számok, azaz $\mathcal{C}_\sigma = \{\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$.

30. *Megjegyzés.* Az előző példában láttuk, hogy végtelen halmazt is tudunk osztályozni. Erre több lehetőség is van. Vegyük példának a $\mathbb{Z}$ egész számok halmazát.

- $\mathcal{C}_1 = \{\{x, x+1\} \colon x \text{ páros}\}$ egy olyan osztályozás, melyben végtelen sok osztály van, de mindegyik 2-elemű.
- $\mathcal{C}_2 = \{\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$ egy olyan osztályozás, melyben 2 darab osztály van, és mindkét osztály végtelen sok elemet tartalmaz.
- $\mathcal{C}_3 = \{\{-1, 0, 1\}, \{\pm x \colon x \text{ legkisebb prímosztója } p, p = 2, 3, 5, \ldots\}\}$ egy olyan osztályozás, melynek van egy háromelemű osztálya és végtelen sok végtelen sok elemet tartalmazó osztálya.

5. Részbenrendezés, Hasse-diagram

Az előző fejezetben az ekvivalenciarelációkat vizsgáltuk meg. Most megnézzük milyen fontos tulajdonságai vannak egy részbenrendezésnek.

31. Definíció (Emlékeztető)**.**

- Egy A halmaz esetén az A^2 halmaz részhalmazait **reláció**knak nevezzük.
- Egy reláció **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.
- Egy reláció (teljes) **rendezés**, ha részbenrendezés és dichotóm.

32. Definíció. Egy $(A; \leq)$ párt **részbenrendezett halmaz**nak nevezünk, ha A egy nemüres halmaz, „$\leq$” pedig egy tetszőleges részbenrendezés az A halmazon.

Tehát a részben rendezett halmaz egy halmaz és egy rajta rögzített részbenrendezési reláció. A szimmetria hiánya teszi lehetővé, hogy bizonyos nagyság szerinti megkülönböztetést vezessünk be a részben rendezett halmazban. (A „nagysághoz” kell egy rendezés, mely eldönti két elemről, hogy egyáltalán össze tudjuk-e hasonlítani őket, és ha igen, akkor melyik van a reláció bal és melyik a jobb oldalán.)

33. Definíció. Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $a, b \in A$. Ekkor jelölje $a < b$ azt, hogy $a \leq b$, de $a \neq b$. Jelölje $a \prec b$ azt, hogy $a < b$, és nincs olyan $x \in A$, melyre $a < x$ és $x < b$ teljesülne. Ha $a \prec b$, akkor azt mondjuk, hogy b **követ**i a-t, a $\prec$ relációt **követési reláció**nak nevezzük.

34. Tétel. *Ha $(A; \leq)$ véges részbenrendezett halmaz, akkor tetszőleges $a, b \in A$ elemekre az alábbi két állítás ekvivalens:*

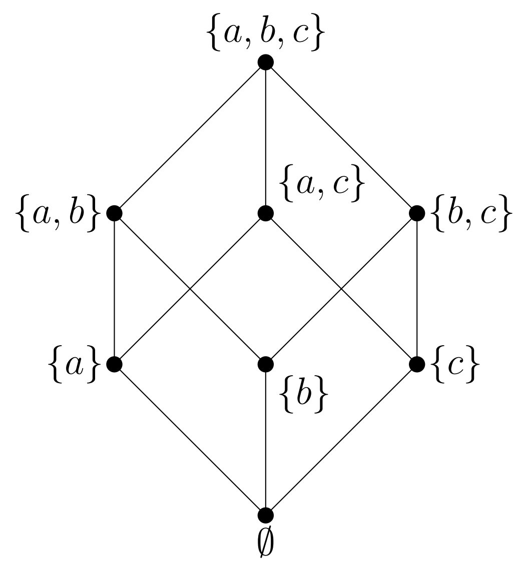
- $a \leq b$;
- *létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és léteznek $c_0, c_1, \ldots, c_n \in A$ elemek úgy, hogy $a = c_0 \prec c_1, \ldots, c_{n-1} \prec c_n = b$.*

A tétel azt jelenti, hogy a $\prec$ követési reláció meghatározza a részbenrendezést.

A részbenrendezés gráfos ábrázolása helyett szemléletesebb a követési relációt ábrázolni, erre szolgál a Hasse-diagram.

35. Definíció (Hasse-diagram)**.** Egy tetszőleges $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz **Hasse-diagram**ja olyan irányított gráf, amelyben a részbenrendezett halmaz A alaphalmazának az elemei alkotják a gráf pontjait, és a gráfban az a és b pontok között pontosan akkor halad él, ha $a \prec b$. Az él irányítását a diagramon úgy ábrázoljuk, hogy a b pontot az a pont fölött helyezzük el. A reflexivitásból adódó hurokéleket a diagramon nem ábrázoljuk.

36. Példa. Legyen adott az $A = \{a, b, c\}$ háromelemű halmaz. A $(\mathcal{P}(A); \subseteq)$ pár bizonyíthatóan részbenrendezett halmaz, és a Hasse-diagramja a jobb oldali ábrán látható.



Mivel van valamiféle „nagyság” bevezetve a halmazon ezért extremális elemeket is kereshetünk erre a nagyságra nézve.

37. Definíció. Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $a \in A$ pedig egy tetszőleges elem.

- Az a **maximális eleme** A-nak, ha nem létezik olyan $x \in A$, melyre $b < x$.
- Az a **minimális eleme** A-nak, ha nem létezik olyan $x \in A$, melyre $x < b$.
- Az a **legnagyobb eleme** A-nak, ha minden $x \in A$ elemre $x \leq a$.
- Az a **legkisebb eleme** A-nak, ha minden $x \in A$ elemre $a \leq x$.

38. Tétel (vagy megjegyzés)**.** *Ha a az $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz legnagyobb eleme, akkor a maximális elem is. Ugyanez igaz legkisebb és minimális elemre.*

39. Tétel (vagy megjegyzés)**.** *Legnagyobb és legkisebb elemből legfeljebb egy darab létezhet egy $(A; \leq)$ részbenrendezett halmazban, maximális és minimális elem több is lehet.*

40. Példa. Az előző példában lévő részbenrendezett halmaz legnagyobb (és egyben maximális) eleme $\{a, b, c\}$, a legkisebb (és egyben minimális) eleme $\emptyset$.

6. Informatikai alkalmazások

- Relációs adatmodell. Tegyük fel, hogy bizonyos személyek neveit és címeit biztonsági okokból két külön adatbázisban (esetleg két külön rendszerben) tároljuk. Az első minden névhez egy azonosító kódot tartalmaz, a második minden kódhoz hozzárendel egy címet. A két „tábla" egymás nélkül használhatatlan. Ahhoz, hogy „lekérdezzük" vala-ki(k)nek a címét, tulajdonképpen egy megfeleltetésszorzást kell alkalmaznunk, először a (név, kód) párt határozzuk meg, ezután a (kód, cím) párt, ebből kapunk (név, cím) párt. Ez két megfeleltetés összeszorzása.
- Rendezési algoritmusok. Adott egy véges halmaz, rendezzük az elemeit a megadott rendezési reláció szerint. (LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek kurzus.)
- Post-háló és Post tétele. LÁSD: Logika és informatikai alkalmazásai kurzus.
- Egy gráf erősen összefüggő komponensei az elérhetőségi reláció által meghatározott osztályai a gráf csúcshalmazának. Informatikai a probléma, mert minden irányított gráfot elképzelhetünk úgy, mint egy számítógép-hálózat reprezentációja, és minden hálózat reprezentálható gráffal. Ha van gráf, akkor van reláció is, ami algebrai eszközökkel vizsgálható.

7. Alkalmazások

- Partícionális információs struktúra. Elsősorban játékelméleti probléma, arról szól, hogy egy játékos nem ismeri, hogy jelenleg mi az állás, de pontosan tudja, hogy az állásról az általa birtokolt információkból mik a lehetséges és nem lehetséges lépések, ami kételemű partíciója az állások halmazának. Ezt általában feltételként szokták alkalmazni, észszerű, hogy miért. Tehát arról van szó, hogy például sakkban egy p állásból látszik, hogy mely s_i állásokba lehet egy lépéssel eljutni. Ekkor a (p, s_i) állások relációban vannak.

- Minden kategorizálási feladat tulajdonképpen osztályozás. Például, ha iratokat rendezünk mappákba, akkor nyilván nem akarjuk, hogy maradjon üres mappa (illetve ha mégis, akkor az nem része a kategorizálásnak), illetve minden iratot pontosan egy mappába szeretnénk betenni. Ez tulajdonképpen az osztályozás definíciója (osztály=mappa, irat=elem).
- Biológia: rendszertani osztályozás, minden (ismert) élőlény beletartozik pontosan egy fajba, és nyilván nem tartunk számon olyan fajt, aminek nem létezik (soha nem is létezett) egyede.