9. GYAKORLAT

Predikátumkalkulus.
Determinánsok.

1. Feladat. Formalizálja az alábbi predikátumkalkulusbeli ítéleteket a megadott individuumtartomány és predikátumjelek segítségével!

1. „Van olyan torony, ami nem függőleges.”
   $U = \{\text{épületek}\}$, $T(x)$: „x torony”, $F(x)$: „x függőleges”
2. „Nem mind arany, ami fénylik.”
   $U = \{\text{tárgyak}\}$, $A(x)$: „x arany”, $F(x)$: „x fénylik”
3. „Minden anya nő, de nem minden nő anya.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, $A(x)$: „x anya”, $N(x)$: „x nő”
4. „Ki korán kel, aranyat lel.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, $A(x)$: „x aranyat lel”, $K(x)$: „x korán kel”
5. „Aki a kicsit nem becsüli, a nagyot nem érdemli.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, $K(x)$: „x megbecsüli a kicsit”, $M(x)$: „x megérdemli a nagyot”
6. „Nincsen rózsa tövis nélkül.”
   $U = \{\text{rózsák}\}$, $T(x)$: „x-nek van tövise”
   $U = \{\text{növények}\}$, $T(x)$: „x-nek van tövise”, $R(x)$: „x rózsa”
7. „Néhány hallgatónak nincs barátja.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, $H(x)$: „x hallgató”, $B(x, y)$: „x az y barátja”
8. „Ha nem csak János becsületes, akkor mindenki becsületes.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, j : „János”, $E(x, y)$: „x és y ugyanaz a személy”, $B(x)$: „x becsületes”

2. Feladat. Formalizálja az alábbi predikátumkalkulusbeli ítéleteket úgy, hogy az individuumtartományt és a predikátumjeleket is adja meg!

1. „Mindenkinek két szülője van.”
2. „Ha egy szakács éhes, akkor főz magának.”
3. „Van olyan ember, aki főz, de nem szakács.”
4. „Vannak szerencsés milliomosok.”
5. „Néhány hallgató megbukik Kalkulusból.”
6. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$
7. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$

3. Feladat. Határozza meg a következő formulák tagadásának azt az alakját, amelyben legfeljebb predikátumot tagadunk! („Vigyük a $\neg$ jelet annyira hátra, amennyire csak lehet.”)

1. $(\forall x)\,(B(x) \to J(x))$
2. $(\exists x)\,(J(x) \land K(x))$
3. $(\exists x)\,(B(x) \land (\exists y)\,(T(x, y)))$
4. $(\forall x)\,((B(x) \land (\exists y)\,T(x, y)) \to B(y))$
5. $(\exists x)\,(T(x) \land \neg Z(x))$
6. $(\forall x)\,(\exists y)\,(\neg A(x) \land \neg B(y))$
7. $(\exists x)\,(\exists y)\,(D(x, y) \to (x = y))$

4. Feladat. Tautológiák-e az alábbi formulák?

1. $\neg(\forall x)(\exists y)\,B(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(x,y))$
2. $(\forall x)(\exists y)\,B(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(B(y,x))$
3. $((\exists x)\,B(x) \wedge (\exists y)\,C(y)) \to (\exists x)(B(x) \wedge C(x))$

Megoldás:

1. Igen, mivel a jobb oldal logikailag ekvivalens a bal oldallal, csak a formális tagadás miatt más alakban vannak felírva.
2. A kvantorok után álló individuumváltozók a $\leftrightarrow$ jel két oldalán megfordíthatók, mert mindegyik kvantor szerepköre csak a $\leftrightarrow$ adott oldalára terjed ki. Így a $\leftrightarrow$ két oldalán megint két ekvivalens formula áll, tehát ez is tautológia.
3. Nem, mert abból, hogy van a csoportban egy szőke és egy tőle esetleg különböző kék szemű hallgató, még nem következik van szőke kék szemű hallgató is. (Ha a két oldal fordítva lenne, akkor tautológia lenne.)

5. Feladat. Határozza meg az alábbi determinánsok értékét!

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ -7 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

6. Feladat. Oldja meg a következő egyenleteket!

1. $\begin{vmatrix} 3 & x \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$
2. $\begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = 3$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & x \\ -3 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 14$
4. $\begin{vmatrix} x & 1 & 5 \\ -3 & 9 & 1 \\ 4 & x & -2 \end{vmatrix} = 0$
5. $\begin{vmatrix} x-3 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 6-x & -2 \end{vmatrix} = 0$

7. Feladat. Számolja ki az alábbi helyvektorok által kifeszített paralelogrammák és paralelepipedonok területét és térfogatát!

1. $v_1 = (4;6)\,,\ v_2 = (-5;9)$
2. $v_1 = (-3;0)\,,\ v_2 = (11;4)$
3. $v_1 = (2;0;-4)\,,\ v_2 = (1;6;-9)\ v_3 = (3;-7;-2)$
4. $v_1 = (-6;2;3)\,,\ v_2 = (0;-8;-2)\ v_3 = (1;1;7)$