Név:

EHA-kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
4	4	3	4	3	18

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2012. október 9-10.

α csoport

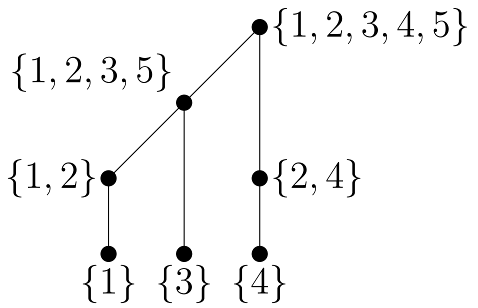
---

1. Feladat (4 pont)**.** Legyen adott az

$$A = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Maximális elem: $\{1,2,3,4,5\}$.
Legnagyobb elem: $\{1,2,3,4,5\}$.
Minimális elemek: $\{1\}, \{3\}, \{4\}$.
Legkisebb elem nincs.

---

2. Feladat (4 pont)**.** Igaz-e, hogy ...

- ... a $\varrho = \{(a,b) : ab > 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció dichotom?
- ... a $\sigma = \{(x,y) : x + y = 9\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció szimmetrikus?
- ... a $\tau = \{(a,b) : a + b \leq 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció antiszimmetrikus?
- ... a $\mu = \{(x,y) : 2 \mid x + y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció reflexív?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

- HAMIS, mert $(-1,2) \in \varrho$ és $(2,-1) \in \varrho$ egyike sem teljesül.
- IGAZ, mert $(x,y) \in \sigma \iff x + y = 9 \iff y + x = 9 \iff (y,x) \in \sigma$.
- HAMIS, mert $(-3,2) \in \tau$ és $(2,-3) \in \tau$ is teljesül, DE $2 \neq -3$.
- IGAZ, mert $(x,x) \in \mu \iff 2 \mid x + x \iff 2 \mid 2x$, és az utóbbi nyilván minden egész szám esetén teljesül.

---

3. Feladat (3 pont)**.** Döntse el, hogy a

$$\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x - y$$

leképezés injektív, szürjektív, bijektív-e! Válaszait indokolja!

Megoldás.
NEM INJEKTÍV, mert $(3,2)\beta = (5,4)\beta$, DE $(3,2) \neq (5,4)$.
SZÜRJEKTÍV, mert minden r valós számnak van őse, például az $(r, 0)$.
NEM BIJEKTÍV, mert nem injektív.

---

4. Feladat (4 pont)**.** Teljesül-e tetszőleges A, B halmazokra az $A \triangle B = B \setminus A$ egyenlőség? Ha igen bizonyítsa, ha nem, adjon meg olyan A, B halmazokat, melyekre nem teljesül!

Megoldás. Tetszőleges A, B halmazokra nem teljesül az egyenlőség, például az $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3\}$ halmazok esetén $A \triangle B = \{1, 3\}$ és $B \setminus A = \{3\}$.

---

5. Feladat (3 pont)**.** Határozza meg a $z = \sqrt{3} - i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

Megoldás. $z = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i \cdot \sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

Név:

EHA-kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
4	4	3	4	3	18

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2012. október 9-10.

β csoport

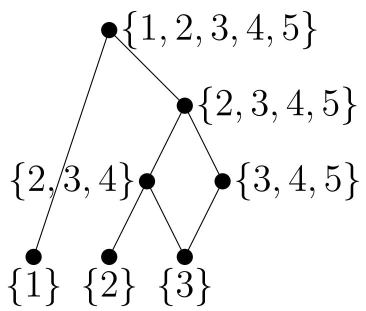
---

1. Feladat (4 pont)**.** Legyen adott az

$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Maximális elem: $\{1,2,3,4,5\}$.
Legnagyobb elem: $\{1,2,3,4,5\}$.
Minimális elemek: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.
Legkisebb elem nincs.

---

2. Feladat (4 pont)**.** Igaz-e, hogy ...

- ... a $\sigma = \{(x,y) : |x-y| < 10\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció reflexív?
- ... a $\tau = \{(x,y) : x+y=5\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció szimmetrikus?
- ... a $\varrho = \{(a,b) : 2 \mid a+b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció dichotom?
- ... a $\mu = \{(a,b) : ab < 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció antiszimmetrikus?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

- IGAZ, mert $(x,x) \in \sigma \iff |x-x| < 10 \iff 0 < 10$, és az utóbbi nyilván minden valós szám esetén teljesül.
- IGAZ, mert $(x,y) \in \tau \iff x+y=5 \iff y+x=5 \iff (y,x) \in \tau$.
- HAMIS, mert $(1,2) \in \varrho$ és $(2,1) \in \varrho$ egyike sem teljesül.
- HAMIS, mert $(-3,2) \in \mu$ és $(2,-3) \in \mu$ is teljesül, DE $2 \neq -3$.

---

3. Feladat (3 pont)**.** Döntse el, hogy az

$$\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

leképezés injektív, szürjektív, bijektív-e! Válaszait indokolja!

Megoldás.
NEM INJEKTÍV, mert $(3, 2)\alpha = (1, 6)\alpha$, DE $(3, 2) \neq (1, 6)$.
SZÜRJEKTÍV, mert minden r valós számnak van őse, például az $(r, 1)$.
NEM BIJEKTÍV, mert nem injektív.

---

4. Feladat (4 pont)**.** Teljesül-e tetszőleges A, B halmazokra az $A \setminus B = A \triangle B$ egyenlőség? Ha igen bizonyítsa, ha nem, adjon meg olyan A, B halmazokat, melyekre nem teljesül!

Megoldás. Tetszőleges A, B halmazokra nem teljesül az egyenlőség, például az $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3\}$ halmazok esetén $A \triangle B = \{1, 3\}$ és $A \setminus B = \{1\}$.

---

5. Feladat (3 pont)**.** Legyen adott a következő három komplex szám:

$$z_1 = 1 - i, \qquad z_2 = 3 + 2i, \qquad z_3 = 2 + 4i.$$

Határozza meg a $\dfrac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3}$ komplex szám kanonikus alakját!

Megoldás. $\dfrac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{11}{10}i.$

Név:

EHA-kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
4	4	3	4	3	18

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2012. október 9-10.

γ csoport

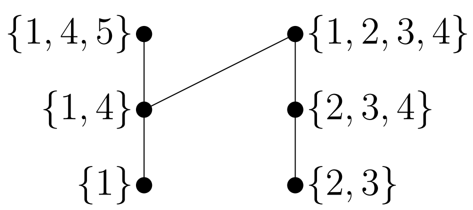
---

1. Feladat (4 pont)**.** Legyen adott az

$$A = \{\{1\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Maximális elemek: $\{1,4,5\}, \{1,2,3,4\}$.
Legnagyobb elem nincs.
Minimális elemek: $\{1\}, \{2,3\}$.
Legkisebb elem nincs.

---

2. Feladat (4 pont)**.** Igaz-e, hogy ...

- ... a $\mu = \{(x,y) : 5 \mid x+y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció szimmetrikus?
- ... a $\sigma = \{(a,b) : a - b > 5\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció dichotom?
- ... a $\tau = \{(a,b) : a + b = 7\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció antiszimmetrikus?
- ... a $\varrho = \{(x,y) : xy \geq 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció reflexív?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

- IGAZ, mert $(x,y) \in \mu \iff 5 \mid x+y \iff 5 \mid y+x \iff (y,x) \in \mu$.
- HAMIS, mert $(1,2) \in \sigma$ és $(2,1) \in \sigma$ egyike sem teljesül.
- HAMIS, mert $(3,4) \in \tau$ és $(4,3) \in \tau$ is teljesül, DE $3 \neq 4$.
- IGAZ, mert $(x,x) \in \varrho \iff xx \geq 0 \iff x^2 \geq 0$, és az utóbbi nyilván minden valós szám esetén teljesül.

---

3. Feladat (3 pont)**.** Döntse el, hogy a

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto y - x$$

leképezés injektív, szürjektív, bijektív-e! Válaszait indokolja!

Megoldás.

NEM INJEKTÍV, mert $(0,3)\psi = (1,4)\psi$, DE $(0,3) \neq (1,4)$.

SZÜRJEKTÍV, mert minden r valós számnak van őse, például az $(0,r)$.

NEM BIJEKTÍV, mert nem injektív.

---

4. Feladat (4 pont)**.** Legyen A a páros pozitív egészek halmaza, B a páratlan pozitív egészek halmaza, és C az egész számok halmaza. Teljesül-e az $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ egyenlőség a fenti A, B, C halmazok esetén? Teljesül-e tetszőleges A, B, C halmazokra?

Megoldás. A megadott halmazok esetén $A \cup B = \mathbb{N}$, $(A \cup B) \cap C = \mathbb{N}$ és $B \cap C = B$, $A \cup (B \cap C) = A \cup B = \mathbb{N}$, azaz teljesül az egyenlőség.

Tetszőleges A, B, C halmazok esetén nem teljesül, például $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{3, 4, 6, 7\}$ esetén $(A \cup B) \cap C = \{3, 4, 6\}$ és $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

---

5. Feladat (3 pont)**.** Legyen adott a következő három komplex szám:

$$z_1 = 2 - i, \qquad z_2 = 1 + 3i, \qquad z_3 = 5 - 2i.$$

Határozza meg a $\dfrac{\overline{z_1} + z_2}{z_3}$ komplex szám kanonikus alakját!

Megoldás. $\dfrac{\overline{z_1} + z_2}{z_3} = \dfrac{7}{29} + \dfrac{26}{29}i.$

Név:

EHA-kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
4	4	3	4	3	18

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2012. október 9-10.

δ csoport

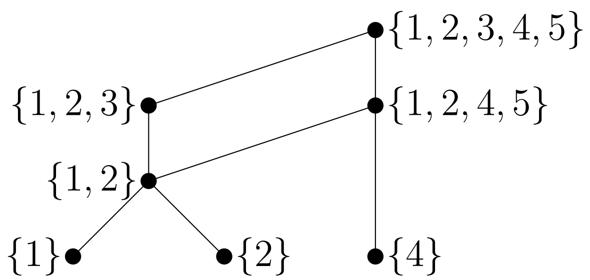
---

1. Feladat (4 pont)**.** Legyen adott az

$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Maximális elem: $\{1,2,3,4,5\}$.
Legnagyobb elem: $\{1,2,3,4,5\}$.
Minimális elemek: $\{1\}, \{2\}, \{4\}$.
Legkisebb elem nincs.

---

2. Feladat (4 pont)**.** Igaz-e, hogy ...

- ... a $\tau = \{(a,b) : 3 \mid a+b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció antiszimmetrikus?
- ... a $\sigma = \{(x,y) : xy < 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció szimmetrikus?
- ... a $\mu = \{(x,y) : x - y < 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció reflexív?
- ... a $\varrho = \{(a,b) : a + b = 6\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció dichotom?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

- HAMIS, mert $(1,2) \in \tau$ és $(2,1) \in \tau$ is teljesül, DE $2 \neq 1$.
- IGAZ, mert $(x,y) \in \sigma \iff xy < 0 \iff yx < 0 \iff (y,x) \in \sigma$.
- IGAZ, mert $(x,x) \in \mu \iff x - x < 2 \iff 0 < 2$, és az utóbbi nyilván minden valós szám esetén teljesül.
- HAMIS, mert $(1,2) \in \varrho$ és $(2,1) \in \varrho$ egyike sem teljesül.

---

3. Feladat (3 pont)**.** Döntse el, hogy a

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y + x$$

leképezés injektív, szürjektív, bijektív-e! Válaszait indokolja!

Megoldás.
NEM INJEKTÍV, mert $(0,3)\varphi = (2,1)\varphi$, DE $(0,3) \neq (2,1)$.
SZÜRJEKTÍV, mert minden r valós számnak van őse, például az $(0, r)$.
NEM BIJEKTÍV, mert nem injektív.

---

4. Feladat (4 pont)**.** Teljesül-e tetszőleges A, B halmazokra az $A \triangle B = B \setminus A$ egyenlőség? Ha igen bizonyítsa, ha nem, adjon meg olyan A, B halmazokat, melyekre nem teljesül!

Megoldás. Tetszőleges A, B halmazokra nem teljesül az egyenlőség, például az $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3\}$ halmazok esetén $A \triangle B = \{1, 3\}$ és $B \setminus A = \{3\}$.

---

5. Feladat (3 pont)**.** Legyen adott a következő három komplex szám:

$$z_1 = 2 - i, \qquad z_2 = 1 + 3i, \qquad z_3 = 5 - 2i.$$

Határozza meg a $\dfrac{\overline{z_1} + z_2}{z_3}$ komplex szám kanonikus alakját!

Megoldás. $\dfrac{\overline{z_1} + z_2}{z_3} = \dfrac{7}{29} + \dfrac{26}{29}i.$

Név:

EHA-kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
4	4	3	4	3	18

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2012. október 9-10.

ε csoport

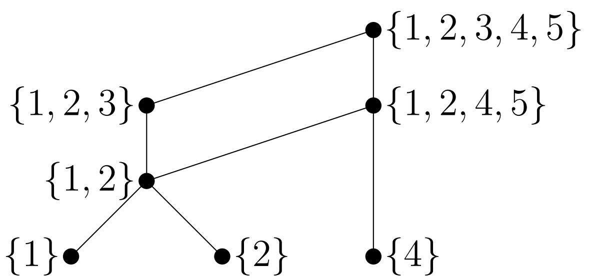
---

1. Feladat (4 pont)**.** Legyen adott az

$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Maximális elem: $\{1,2,3,4,5\}$.
Legnagyobb elem: $\{1,2,3,4,5\}$.
Minimális elemek: $\{1\}, \{2\}, \{4\}$.
Legkisebb elem nincs.

---

2. Feladat (4 pont)**.** Igaz-e, hogy ...

- ... a $\tau = \{(a,b) : 3 \mid a+b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció antiszimmetrikus?
- ... a $\sigma = \{(x,y) : xy < 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció szimmetrikus?
- ... a $\mu = \{(x,y) : x - y < 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció reflexív?
- ... a $\varrho = \{(a,b) : a + b = 6\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció dichotom?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

- HAMIS, mert $(1,2) \in \tau$ és $(2,1) \in \tau$ is teljesül, DE $2 \neq 1$.
- IGAZ, mert $(x,y) \in \sigma \iff xy < 0 \iff yx < 0 \iff (y,x) \in \sigma$.
- IGAZ, mert $(x,x) \in \mu \iff x - x < 2 \iff 0 < 2$, és az utóbbi nyilván minden valós szám esetén teljesül.
- HAMIS, mert $(1,2) \in \varrho$ és $(2,1) \in \varrho$ egyike sem teljesül.

---

3. Feladat (3 pont)**.** Döntse el, hogy a

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y + x$$

leképezés injektív, szürjektív, bijektív-e! Válaszait indokolja!

Megoldás.
NEM INJEKTÍV, mert $(0,3)\varphi = (2,1)\varphi$, DE $(0,3) \neq (2,1)$.
SZÜRJEKTÍV, mert minden r valós számnak van őse, például az $(0, r)$.
NEM BIJEKTÍV, mert nem injektív.

---

4. Feladat (4 pont)**.** Legyen A a páros pozitív egészek halmaza, B a páratlan pozitív egészek halmaza, és C az egész számok halmaza. Teljesül-e az $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ egyenlőség a fenti A, B, C halmazok esetén? Teljesül-e tetszőleges A, B, C halmazokra?

Megoldás. A megadott halmazok esetén $A \cup B = \mathbb{N}$, $(A \cup B) \cap C = \mathbb{N}$ és $B \cap C = B$, $A \cup (B \cap C) = A \cup B = \mathbb{N}$, azaz teljesül az egyenlőség.

Tetszőleges A, B, C halmazok esetén nem teljesül, például $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{3, 4, 6, 7\}$ esetén $(A \cup B) \cap C = \{3, 4, 6\}$ és $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

---

5. Feladat (3 pont)**.** Határozza meg a $z = 2 - 2i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

Megoldás. $z = \sqrt{8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4}\right)$.
