

# Polinomosztás

Diszkrét matematika I.  
gyakorlat

Összeállította:  
Bogya Norbert

# Tartalom

## 1 Elméleti bevezető

## 2 Példák

- 1. példa
- 2. példa
- 3. példa

## Elmélet I.

## Definíció (polinom)

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

alakú összeg, ahol  $a_0, \dots, a_n \in D$ , és  $x$  pedig egy határozatlan ( $D$  tetszőleges integritástartomány, például  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ , vagy  $\mathbb{C}$ ).

Feltehető, hogy

$$a_n \neq 0.$$

## Elmélet I.

## Definíció (polinom)

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

alakú összeg, ahol  $a_0, \dots, a_n \in D$ , és  $x$  pedig egy határozatlan ( $D$  tetszőleges integritástartomány, például  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ , vagy  $\mathbb{C}$ ).

Feltehető, hogy

$$a_n \neq 0.$$

## Definíció (fokszám)

Ha  $a_n \neq 0$ , akkor  $\deg(p) = n$ .

## Elmélet I.

## Definíció (polinom)

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

alakú összeg, ahol  $a_0, \dots, a_n \in D$ , és  $x$  pedig egy határozatlan ( $D$  tetszőleges integritástartomány, például  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ , vagy  $\mathbb{C}$ ).

Feltehető, hogy

$$a_n \neq 0.$$

## Definíció (fokszám)

Ha  $a_n \neq 0$ , akkor  $\deg(p) = n$ .

## Definíció (főpolinom)

Ha  $a_n = 1$ , akkor  $p$  főpolinom.

## Elmélet II.

## Tétel (maradékos osztás)

Ha  $T$  test, akkor BÁRMELY  $f, g \in T[x]$  polinomra teljesül, hogy ha  $g \neq 0$ , akkor létezik olyan  $q$  és  $r$   $T[x]$ -beli polinom, melyre

$$f = gq + r \text{ és } \deg(r) < \deg(g).$$

## Elmélet II.

## Tétel (maradékos osztás)

Ha  $T$  test, akkor BÁRMELY  $f, g \in T[x]$  polinomra teljesül, hogy ha  $g \neq 0$ , akkor létezik olyan  $q$  és  $r$   $T[x]$ -beli polinom, melyre

$$f = gq + r \text{ és } \deg(r) < \deg(g).$$

## Megjegyzés

$\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  és  $\mathbb{C}$  test.

## Elmélet II.

## Tétel (maradékos osztás)

Ha  $T$  test, akkor BÁRMELY  $f, g \in T[x]$  polinomra teljesül, hogy ha  $g \neq 0$ , akkor létezik olyan  $q$  és  $r$   $T[x]$ -beli polinom, melyre

$$f = gq + r \text{ és } \deg(r) < \deg(g).$$

## Megjegyzés

$\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  és  $\mathbb{C}$  test.

## Megjegyzés

Ha  $p$  és  $q$  két polinom, akkor

$$\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q).$$



# Tartalom

## 1 Elméleti bevezető

## 2 Példák

- 1. példa
- 2. példa
- 3. példa

## 1. példa (I. rész)

**Feladat:**  $f = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ,  $g = x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = ?$$

# 1. példa (I. rész)

**Feladat:**  $f = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ,  $g = x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = ?$$

1. Először a legnagyobb fokszámú tagra figyeljünk,  $f$ -ben és  $g$ -ben egyaránt. Tehát a feladat:  $4x^3 : x = ?$

## 1. példa (I. rész)

**Feladat:**  $f = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ,  $g = x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = ?$$

1. Először a legnagyobb fokszámú tagra figyeljünk,  $f$ -ben és  $g$ -ben egyaránt. Tehát a feladat:  $4x^3 : x = ?$  Válasz:  $4x^2$ . Ezt írjuk az egyenlőség jel mögé.

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2$$

# 1. példa (I. rész)

**Feladat:**  $f = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ,  $g = x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = ?$$

1. Először a legnagyobb fokszámú tagra figyeljünk,  $f$ -ben és  $g$ -ben egyaránt. Tehát a feladat:  $4x^3 : x = ?$  Válasz:  $4x^2$ . Ezt írjuk az egyenlőség jel mögé.

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2$$

2. Szorozzuk meg  $g$ -t a kapott eredménnyel, és írjuk az  $f$  megfelelő fokszámú tagjai alá rendezve a kapott szorzatot.

## 1. példa (1. rész)

**Feladat:**  $f = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ,  $g = x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = ?$$

1. Először a legnagyobb fokszámú tagra figyeljünk,  $f$ -ben és  $g$ -ben egyaránt. Tehát a feladat:  $4x^3 : x = ?$  Válasz:  $4x^2$ . Ezt írjuk az egyenlőség jel mögé.

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2$$

2. Szorozzuk meg  $g$ -t a kapott eredménnyel, és írjuk az  $f$  megfelelő fokszámú tagjai alá rendezve a kapott szorzatot.

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2$$

## 1. példa (I. rész)

**Feladat:**  $f = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ,  $g = x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = ?$$

1. Először a legnagyobb fokszámú tagra figyeljünk,  $f$ -ben és  $g$ -ben egyaránt. Tehát a feladat:  $4x^3 : x = ?$  Válasz:  $4x^2$ . Ezt írjuk az egyenlőség jel mögé.

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2$$

2. Szorozzuk meg  $g$ -t a kapott eredménnyel, és írjuk az  $f$  megfelelő fokszámú tagjai alá rendezve a kapott szorzatot.

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 \\ 4x^3 \end{array}$$

## 1. példa (1. rész)

**Feladat:**  $f = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ,  $g = x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = ?$$

1. Először a legnagyobb fokszámú tagra figyeljünk,  $f$ -ben és  $g$ -ben egyaránt. Tehát a feladat:  $4x^3 : x = ?$  Válasz:  $4x^2$ . Ezt írjuk az egyenlőség jel mögé.

$$(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2$$

2. Szorozzuk meg  $g$ -t a kapott eredménnyel, és írjuk az  $f$  megfelelő fokszámú tagjai alá rendezve a kapott szorzatot.

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 \\ 4x^3 \quad -4x^2 \end{array}$$



# 1. példa (II. rész)

3.  $f$ -ből vonjuk ki, ami alatta van.

## 1. példa (II. rész)

3.  $f$ -ből vonjuk ki, ami alatta van.

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 \\ 4x^3 - 4x^2 \end{array}$$

## 1. példa (II. rész)

3.  $f$ -ből vonjuk ki, ami alatta van.

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 \\ \underline{4x^3 - 4x^2} \end{array}$$

## 1. példa (II. rész)

3.  $f$ -ből vonjuk ki, ami alatta van.

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 \\ \underline{4x^3 - 4x^2} \phantom{- 3x + 5} \\ 6x^2 \phantom{- 3x + 5} \end{array}$$

## 1. példa (II. rész)

3.  $f$ -ből vonjuk ki, ami alatta van.

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 \\ \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\ 6x^2 \quad -3x \end{array}$$

## 1. példa (II. rész)

3.  $f$ -ből vonjuk ki, ami alatta van.

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 \\ \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\ 6x^2 \quad -3x \quad +5 \end{array}$$

# 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5
 \end{array}$$



# 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2}
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x}
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x} \\
 \phantom{6x^2} \quad +9x \quad +5
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x} \\
 3x
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x} \\
 3x \quad +5
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x + 3 \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x} \\
 3x \quad +5
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x + 3 \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 - 3x + 5 \\
 \underline{6x^2 - 6x} \\
 3x + 5 \\
 \underline{3x} \\
 5
 \end{array}$$



## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x + 3 \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x} \\
 3x \quad +5 \\
 \underline{3x \quad -3} \\
 \phantom{3x} \quad +8
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x + 3 \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x} \\
 3x \quad +5 \\
 \underline{3x \quad -3} \\
 8
 \end{array}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x + 3 \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x} \\
 3x \quad +5 \\
 \underline{3x \quad -3} \\
 8
 \end{array}
 \Rightarrow \text{STOP}$$

## 1. példa (III. rész)

4. Most úgy folytatjuk, hogy a legalsó sort tekintjük az  $f$ -nek, és hajtsuk végre újra az **1-3.** lépést, de az **1.** lépésnél kapott eredményt a legfelső sorba jegyezzük fel. Addig csináljuk ezt az algoritmust, míg kivonás után egy olyan polinomot nem kapunk, melynek fokszáma kisebb mint  $g$ -é.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 1) = 4x^2 + 6x + 3 \\
 \underline{4x^3 \quad -4x^2} \\
 6x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 \underline{6x^2 \quad -6x} \\
 3x \quad +5 \\
 \underline{3x \quad -3} \\
 8
 \end{array}
 \implies \text{STOP}$$

$$f = (4x^2 + 6x + 3)g + 8$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$(2x^4 + 5x^2 - x + 10) : (x^2 + x) =$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$(2x^4 + 5x^2 - x + 10) : (x^2 + x) = 2x^2$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) \\ 2x^4 \end{array} : (x^2 + x) = 2x^2$$



## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \\ 2x^4 \quad +2x^3 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \\ \underline{2x^4 \quad +2x^3} \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (2x^4 \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \\ \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\ \quad -2x^3 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 \quad -2x^3 \quad +5x^2
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 \quad -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3}
 \end{array}$$



## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2}
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 \quad \quad \quad 7x^2 \quad -x \quad +10
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 \qquad \qquad \qquad 7x^2
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 \qquad \qquad \qquad 7x^2 \quad -x
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 \qquad \qquad 7x^2 \quad -x \quad +10
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \quad +7 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 7x^2 \quad -x \quad +10
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (2x^4 \phantom{+5x^2} - x + 10) : (x^2 + x) = 2x^2 - 2x + 7 \\ \underline{2x^4 \phantom{+5x^2} + 2x^3 \phantom{-x} + 10} \\ -2x^3 \phantom{+5x^2} - x + 10 \\ \underline{-2x^3 \phantom{+5x^2} - 2x^2 \phantom{-x} + 10} \\ 7x^2 - x + 10 \\ \underline{7x^2} \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \quad +7 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 7x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{7x^2 \quad +7x} \\
 \qquad \qquad \qquad -8x \quad +10
 \end{array}$$



## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \quad +7 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 7x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{7x^2 \quad +7x} \\
 \qquad \qquad \qquad -8x \quad +10
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \quad +7 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 7x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{7x^2 \quad +7x} \\
 -8x
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \qquad \qquad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \quad +7 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 \qquad 7x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \qquad \underline{7x^2 \quad +7x} \\
 \qquad \qquad -8x \quad +10
 \end{array}$$

## 2. példa

**Feladat:**  $f = 2x^4 + 5x^2 - x + 10$ ,  $g = x^2 + x$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \quad \quad +5x^2 \quad -x \quad +10) : (x^2 + x) = 2x^2 \quad -2x \quad +7 \\
 \underline{2x^4 \quad +2x^3} \\
 -2x^3 \quad +5x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{-2x^3 \quad -2x^2} \\
 7x^2 \quad -x \quad +10 \\
 \underline{7x^2 \quad +7x} \\
 -8x \quad +10 \quad \Rightarrow \quad \text{STOP}
 \end{array}$$

$$f = (2x^2 - 2x + 7)g + (-8x + 10)$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(-x^5 \quad -5x^3 \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) =$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$(-x^5 \quad -5x^3 \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (-x^5 \quad -5x^3 \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \\ -x^5 \end{array}$$



## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{pmatrix} -x^5 & -5x^3 & & +4x & -1 \\ -x^5 & -2x^3 & & & \end{pmatrix} : (x^3 + 2x - 1) = -x^2$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{pmatrix} -x^5 & -5x^3 & & +4x & -1 \\ -x^5 & -2x^3 & +x^2 & & \end{pmatrix} : (x^3 + 2x - 1) = -x^2$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) \\ \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \end{array} : (x^3 + 2x - 1) = -x^2$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \\ \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\ -3x^3 \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \\ \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\ \quad \quad -3x^3 \quad -x^2 \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \\ \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\ \quad \quad -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \\
 \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\
 -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1
 \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r} (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \quad -3 \\ \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \phantom{\quad \quad \quad} \\ -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1 \end{array}$$



## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \quad -3 \\
 \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\
 -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1 \\
 -3x^3
 \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \quad -3 \\
 \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\
 \quad -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1 \\
 \quad \underline{-3x^3} \quad \quad \quad -6x
 \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \quad -3 \\
 \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\
 \quad -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1 \\
 \quad -3x^3 \quad \quad \quad -6x \quad +3
 \end{array}$$



## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \quad -3 \\
 \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\
 \quad -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1 \\
 \quad \underline{-3x^3 \quad \quad \quad -6x \quad +3} \\
 \quad \quad \quad -x^2
 \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \quad -3 \\
 \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\
 -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1 \\
 \underline{-3x^3 \quad \quad \quad -6x \quad +3} \\
 -x^2 \quad +10x
 \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \quad -3 \\
 \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\
 \quad -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1 \\
 \quad \underline{-3x^3} \\
 \quad \quad -x^2 \quad +10x \quad -4
 \end{array}$$

## 3. példa

**Feladat:**  $f = -x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ ,  $g = x^3 + 2x - 1$ ,  $q, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 (-x^5 \quad -5x^3 \quad \quad \quad +4x \quad -1) : (x^3 + 2x - 1) = -x^2 \quad -3 \\
 \underline{-x^5 \quad -2x^3 \quad +x^2} \\
 -3x^3 \quad -x^2 \quad +4x \quad -1 \\
 \underline{-3x^3 \quad \quad \quad -6x \quad +3} \\
 -x^2 \quad +10x \quad -4 \quad \quad \quad \Rightarrow \quad \text{STOP}
 \end{array}$$

$$f = (-x^2 - 3)g + (-x^2 + 10x - 4)$$



# Vége

Remélem, hogy a  
bemutató segített  
megérteni a dolgot!