Halmazok

Alapfogalmak, hatványhalmaz,
halmazműveletek, halmazműveletek azonosságai.

1. Alapfogalmak

A **halmaz** és az **eleme** alapfogalmak, nem definiáljuk őket.
Jelölés: $x \in H$: az x eleme a H halmaznak. Itt x egy tetszőleges valami, mivel a H elemei is tetszőleges dolgok lehetnek. Egy halmaz **véges**, ha véges sok eleme van. Ezt a véges számot a halmaz **elemszám**ának nevezzük.

1. Definíció (Üres halmaz)**.** Az **üres halmaz** olyan halmaz, melynek nincs eleme. Jele: $\emptyset$. Másképp fogalmazva: minden x-re teljesül az, hogy $x \notin \emptyset$.

2. *Megjegyzés.* Csak egyetlen üres halmaz van, viszont sok különböző módon felírható. Például

$$\emptyset = \{10\text{-nél nagyobb páros prímszámok}\} = \{4 \text{ fejű piros kutyák}\}.$$

Ha a halmaz nem üres, akkor elemeit megadhatjuk felsorolással, képlettel, körülírással; a lényeg, hogy egyértelműen kiderüljön, hogy mik tartoznak a halmazba, és mik nem.

3. Definíció. Két halmaz akkor **egyenlő**, ha elemeik megegyeznek. Jelölés: $A = B$.

4. *Megjegyzés.* Az előző definíció értelmében egy halmazban minden elemet egyszeres multiplicitással számolunk. Például $\{0,1,2\} = \{0,0,0,1,1,2,2\}$, mert a két oldal elemei ugyanazok. Ugyanígy értelmetlen a halmazban az elemek sorrendjét megkülönböztetni.

5. Példa. $H = \{2,4,6,8\} = \{x \in \mathbb{N} : x < 10 \text{ és } \exists y \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x = 2y\}$ = „egyjegyű páros számok halmaza”

6. Példa. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
A bal oldali halmaz az üres halmaz, neki nincs eleme, elemszáma nulla. A jobb oldali egy olyan halmaz, mely 1 elemet tartalmaz, mégpedig az üres halmazt. Ennek az elemszáma 1. Ez a kettő olyan, mint egy üres könyv, illetve az üres könyvet tartalmazó polc. A könyv üres, de a polc nem. A két halmaz természetesen nem egyenlő.

2. Részhalmaz, hatványhalmaz

7. Definíció (Részhalmaz)**.** Az A halmaz a B halmaznak **részhalmaz**a, ha minden A-beli elem B-nek is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$.

8. *Megjegyzés.* Minden H halmaznak van két triviális részhalmaza:

- $H \subseteq H$, azaz minden halmaz részhalmaza saját magának, illetve
- $\emptyset \subseteq H$, azaz az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

9. Definíció (Valódi részhalmaz)**.** Az A halmaz a B halmaznak **valódi részhalmaz**a, ha részhalmaza, de nem egyenlő vele. Jelölése: $A \subset B$.

10. Tétel. *Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor*

- *ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$;*
- *ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.*

11. Definíció (Hatványhalmaz)**.** Egy H halmaz **hatványhalmaz**ának nevezzük azt a halmazt, mely a H halmaz összes részhalmazából áll. Jelölése: $\mathcal{P}(H)$.

12. Példa. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

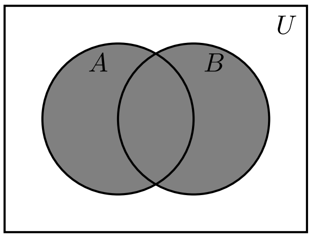
Általában egy rögzített, jól definiált halmaz elemeivel foglalkozunk, ugyanis nem túl sok értelme van a $H = \{0, 1, 2, 3, \text{Shakespeare összes művei}, p, q, r\}$ halmaznak. Ez is egy korrekten definiált halmaz, de gyakorlati haszna nincs. Ezért meg szoktunk állapítani egy alaphalmazt, és csak ezen alaphalmaz elemeit vizsgáljuk, az ezen kívüli elemekkel nem foglalkozunk. Például a prímszámok halmazának vizsgálatakor az alaphalmazt tekinthetjük például az egész számok halmazának, mert úgy sem akarjuk azt vizsgálni, hogy egy ceruza eleme-e a prímszámok halmazának. Mivel a ceruza nincs az alaphalmazban, így nem is merül fel ilyen kérdés.

3. Halmazműveletek

13. Definíció (Halmazműveletek)**.** Legyen A és B két tetszőleges halmaz, U legyen a rögzített alaphalmaz, $A, B \subseteq U$. (A formális definíciók mellett a műveleteket Venn-diagramokon is szemléltetjük.)

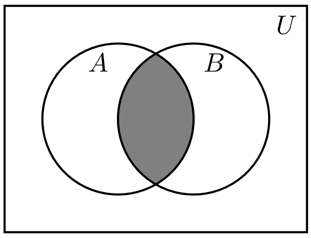
1. Az A és B halmazok **unió**jának nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van valamelyik halmazban. Jelölés: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x :\ x \in A \text{ VAGY } x \in B\}$$



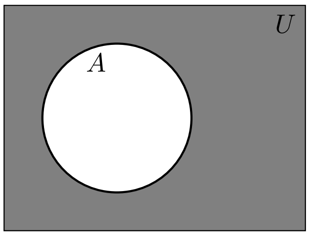
2. Az A és B halmazok **metszet**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van mindkét halmazban. Jelölés: $A \cap B$.

$$A \cap B = \big\{x :\ x \in A \text{ ÉS } x \in B\big\}$$



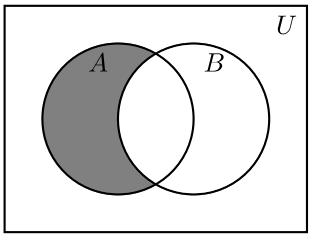
3. Az A halmaz **komplementer**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van U-ban (az alaphalmazban), de nincs benne A-ben. Jelölés: $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \big\{x :\ x \in U \text{ ÉS } x \notin A\big\}$$



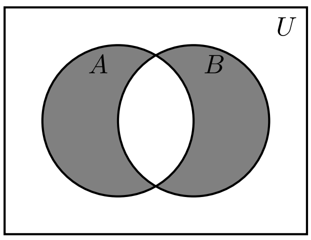
4. Az A és B halmazok **különbség**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van A-ban, de nincs benne B-ben. Jelölés: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \big\{x :\ x \in A \text{ ÉS } x \notin B\big\} = A \cap \overline{B}$$



5. Az A és B halmazok **szimmetrikus differenciá**jának nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme az A és a B halmazok közül pontosan az egyikben van benne. Jelölés: $A \triangle B$.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



4. Halmazműveleti egyenlőségek

Ebben a részben a halmazműveletek néhány fontosabb tulajdonságát vizsgáljuk meg. Tételként fogunk rájuk hivatkozni, de az állítások legnagyobb része az előbbi definíciók alapján könnyen és gyorsan igazolható.

14. Tétel. *Tetszőleges A, B, C halmazokra*

$$\begin{array}{ccr}
A \cap A = A, & A \cup A = A, & \textit{(idempotencia)} \\
A \cap B = B \cap A, & A \cup B = B \cup A, & \textit{(kommutativitás)} \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,, & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,, & \textit{(asszociativitás)} \\
(A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \textit{(abszorptivitás)} \\
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\,, & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\,. & \textit{(disztributivitás)}
\end{array}$$

15. Tétel. *Tetszőleges $A, B\,(\subseteq U)$ halmazokra*

$$\begin{array}{ccr}
\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, & \textit{(de Morgan azonosságok)} \\
\multicolumn{2}{c}{\overline{\overline{A}} = A,} & \\
A \cap \overline{A} = \emptyset, & A \cup \overline{A} = U, & \\
A \cap U = A, & A \cup U = U, & \\
A \cap \emptyset = \emptyset, & A \cup \emptyset = A. &
\end{array}$$

A következő tétel már szerepelt a halmazműveletek definíciójánál, azonban fontosságuk miatt tételként is leírjuk újra. A definícióknál az igazi definíció a szöveges definíció. Ebből lehet levezetni a következő egyenlőségeket a nyelvtani kötőszavakat megfelelően variálva.

16. Tétel. *Tetszőleges $A, B\,(\subseteq U)$ halmazokra*

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

és

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

5. Alkalmazások

1. Halmaz, mint absztrakt adattípus. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus.
2. Java programozási nyelv: például Set interfész; AbstractSet, HashSet osztály.
3. Formális nyelvek és számítástudomány:
    - ábécé: előre rögzített, meghatározott jelek általában véges halmaza, például $\Sigma = \{$magyar nyelv által használt betűk és karakterek$\}$;
    - az ábécé elemei a karakterek, a karakterekből álló sorozatok a szavak, például Shakespeare minden műve egy-egy szó;
    - Σ^* az összes szavak halmaza;
    - Σ^* részhalmazai a nyelvek, például Shakespeare összes műve egy nyelv.
    - LÁSD: Bonyolultságelmélet kurzus.
4. Reguláris kifejezések: olyan string, amivel meghatározható stringek egy halmaza.
5. Fontos kiterjesztés: fuzzy-halmazok. Alkalmazásai: irányítástechnika, mesterséges intelligencia, elektronika. LÁSD: Mesterséges intelligencia kurzus.
6. Mandelbrot-halmaz és egyéb fraktálok.
7. Számelméleti halmazok: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
8. Biológia: rendszertani kategorizálás.
9. Minden területen, mindenféle kategóriába sorolás halmazelméleti feladat. Ujjlenyomat keresése adatbázisban, telefonszám keresése telefonkönyvben ... - ez mind olyan probléma, mely arra vezethető vissza, hogy egy adott objektum eleme-e egy halmaznak. Gyakorlatban a halmazokon már értelmezve van valami sorrendiségi reláció, így már nem pusztán matematikai halmazokról beszélhetünk, ahol a halmaz elemeinek sorrendje nem számít. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus - Keresési és rendezési algoritmusok.