Diszkrét matematika I. gyakorlat

5. Gyakorlat

Bogya Norbert

Bolyai Intézet

2012. október 2-3.

Tartalom

Számosságok

- Eddig volt: véges halmaz — halmaz elemszáma.
- Ma: végtelen halmaz — halmaz számossága.

Mikor egyenlő két végtelen halmaz számossága?

Definíció

Az A és B halmaz számossága egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.

1. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy a páros számok halmazának ugyanannyi eleme van, mint a természetes számok halmazának.

Számosságok

Milyen végtelen számosságok léteznek?

Definíció

Az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ természetes számok halmazának számosságát megszámlálhatóan végtelennek nevezzük, és $\aleph_0$-lal jelöljük.

Definíció

Az $\mathbb{R}$ valós számok halmazának számosságát kontinuum végtelennek nevezzük, és c-vel jelöljük.

Tétel

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, azaz $\aleph_0 < c$.

Tétel

Tetszőleges H halmaz esetén $|H| < |\mathcal{P}(H)|$.

Számosságok

2. Feladat

Igazak-e a következő állítások?

1. A c a legnagyobb végtelen számosság.
2. Létezik az $\aleph_0$-nál kisebb számosságú halmaz.
3. Létezik az $\aleph_0$-nál kisebb számosságú végtelen halmaz.
4. Bármely halmaznál van nagyobb számosságú halmaz.

Megoldások

Hamis, igaz, hamis, igaz.

Számosságok

Számosságaritmetika alaptétele

Legyen A és B két nemüres halmaz. Ha az A és a B közül legalább az egyik végtelen számosságú, akkor

$$|A \cup B| = |A \times B| = \max\{|A|, |B|\}.$$

Nevezetes halmazok számossága

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$
- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{T}| = c$

3. Feladat

$$|\mathbb{R} \cup \mathbb{Z}| = ?, \quad |\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}| = ?, \quad |\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}| = ?$$

Számosságok

4. Feladat

Igazak-e a következő állítások?

1. $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$
2. $\left|\mathbb{Q}^4\right| = \left|\mathbb{N}^3\right|$
3. Létezik $\mathbb{Q}^7 \to \mathbb{R}^2$ bijekció.
4. Létezik $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}^5$ bijekció.
5. Létezik $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{Z}^{10}$ bijekció.
6. $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > c$
7. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a legnagyobb végtelen számosság.

Megoldás

Hamis, igaz, hamis, igaz, hamis, igaz, hamis.

Tartalom

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$ egy komplex szám.

Kanonikus alak

$z = a + b \cdot i$

- $a = \mathrm{Re}(z)$ a z valós része
- $a = \mathrm{Im}(z)$ a z képzetes része
- i a képzetes egység, továbbá $i^2 = -1$

Trigonometrikus alak

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a z abszolút értéke
- $\varphi = \arg(z)$ a z argumentuma

Komplex számok

5. Feladat

Adja meg a következő komplex számok összes alakját!

1. $z_1 = (2, 2)$
2. $z_2 = -1 + i$
3. $z_3 = -\sqrt{3} - i$
4. $z_4 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
5. $z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Megoldás

1. $z_1 = 2 + 2i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
2. $z_2 = (-1, 1) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $z_3 = (-\sqrt{3}, -1) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$
4. $z_4 = 1 - \sqrt{3}i = (1, -\sqrt{3})$
5. $z_5 = -1 - i = (-1, -1)$

Legyenek z_1 és z_2 a következő kanonikus alakú komplex számok:

$$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di.$$

Ekkor definiálhatjuk a következő **műveleteket**:

- *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$
- *Ellentett:* $-z_1 = -a - bi.$
- *Kivonás:* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i.$
- *Szorzás:* $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$
- *Konjugált:* $\overline{z_1} = a - bi.$
- *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$
- *Osztás:*

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i\end{aligned}$$

Vége

Köszönöm a türelmet!

Jövő héten ZH!