Diszkrét matematika I. gyakorlat

Vizsgafeladatok megoldása

Bogya Norbert

2012. december 5.

Tartalom

1. Teljes feladatsor #1
2. Teljes feladatsor #2
3. Teljes feladatsor #3
4. Teljes feladatsor #4
5. Válogatott feladatok
6. Végső bölcsesség

1. kérdés

(1) Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(4-2i)z = 2+14i$? (*Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.*)

!	-3 ○	-2 ○	-1 ○	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	egyik sem ○	!

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

1. feladat

Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(4-2i)\,z = 2+14i$?
(*Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.*)

1. kérdés

1. feladat

Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(4-2i)\,z = 2+14i$?
(*Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.*)

Hint

Meg kell oldani a

$$(4-2i)\,z = 2+14i$$

egyenletet a komplex számok körében, ahol z az ismeretlen!

Megoldás:

$$z = \frac{2+14i}{4-2i} \cdot \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{-20+60i}{20} = -1+3i$$

2. kérdés

(2) Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.	!	igen ○	nem ○	!
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.	!	igen ○	nem ○	!
$A \cup (B \cap A) = A$.	!	igen ○	nem ○	!

2. feladat

Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

- Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cup (B \cap A) = A$.

2. kérdés

2. feladat

Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

- Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cup (B \cap A) = A$.

Hint

Mivel a vizsga tesztes, rajzolgatni is lehet.

Megoldás:

- Igaz. (Kijön a definícióból.)
- Igaz. (Az unió disztributív a metszetre nézve.)
- Igaz. (Elnyelési tulajdonság.)

3. kérdés

(3) Legyen $A = P(\mathbf{N})$ az $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \{(X, Y) \in A^2 : X \cap Y$ véges$\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus ◯	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	egyik sem ◯	?

3. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \left\{\left(X, Y \in A^2 : X \cap Y \text{ véges}\right)\right\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	egyik sem	?

3. kérdés

3. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \left\{ \left(X, Y \in A^2 : X \cap Y \text{ véges} \right) \right\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	egyik sem	?

Hint

Ne essünk azonnal teljesen kétségbe.

Megoldás:

- Szimmetrikus. Triviális. (Metszetben nem számít a sorrend.)
- Nem antiszimmetrikus. (Az előző miatt már ez is triviális.)
- Nem reflexív. Ez már nem feltétlen triviális. Ellenpélda: $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ viszont $(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \notin \rho$, mert $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}$ nem véges.

4. kérdés

(4) Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-3 ○	-2 ○	0 ○	2 ○	1 ○	3 ○	$x - 3$ ○	$x^2 + 1$ ○	egyik sem ○	!

4. feladat

Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

Hint

Polinomosztás.

Megoldás:

$$x^3 + x^2 - 2x + 10 = (x+3) \cdot (x^2 - 2x + 4) - 2$$

5. kérdés

(5) Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél" ítéletet formalizálja. Az alábbi

$$\begin{aligned} U:&\quad (\forall x)(\exists y)\big(\neg A(x) \wedge F(y) \wedge P\big),\\ V:&\quad \big(P \wedge (\forall x)A(x)\big) \to \big((\forall y)\neg F(y)\big),\\ W:&\quad \big(P \wedge (\forall x)(\exists y)\big)\Big(A(x) \vee F(y)\Big). \end{aligned}$$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F-vel ekvivalens formula?

!	U ○	V ○	W ○	egyik sem ○	!

5. feladat

Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél" ítéletet formalizálja. Az alábbi

- $U : (\forall x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge F(x) \wedge P)$
- $V : (P \wedge (\forall x)A(x)) \to ((\forall y)\neg F(y))$
- $W : (P \wedge (\forall x)(\exists y))(A(x) \vee F(y))$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F-vel ekvivalens formula?

5. kérdés

5. feladat

Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél" ítéletet formalizálja. Az alábbi

- $U : (\forall x)\,(\forall y)\,(\neg A(x) \wedge F(x) \wedge P)$
- $V : (P \wedge (\forall x)\, A(x)) \to ((\forall y)\, \neg F(y))$
- $W : (P \wedge (\forall x)\,(\exists y))\,(A(x) \vee F(y))$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F-vel ekvivalens formula?

Megoldás:

Egyértelmű, hogy a V formulát keressük. Az első mást jelent, az utolsó szintaktikailag nem is (jó) formula.

6. kérdés

(6) Igazak-e az alábbi kijelentések?

Létezik $\mathbf{N} \to \mathbf{N}^3$ bijektív leképezés.	! igen ○	nem ○ !
Létezik $\mathbf{Q}^7 \to \mathbf{R}$ bijektív leképezés.	! igen ○	nem ○ !
Létezik $\mathbf{R} \to \mathbf{N}^2$ bijektív leképezés.	! igen ○	nem ○ !

6. feladat

Igazak-e az alábbi kijelentések?

- Létezik $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{Q}^7 \to \mathbb{R}$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{N}^2$ bijektív leképezés.

6. kérdés

6. feladat

Igazak-e az alábbi kijelentések?

- Létezik $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{Q}^7 \to \mathbb{R}$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{N}^2$ bijektív leképezés.

Hint

A feladat a számosságokhoz kapcsolódik.

Megoldás:

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0 = \aleph_0 = \left|\mathbb{N}^3\right| \quad \Longrightarrow$ létezik bijekció
- $\left|\mathbb{Q}^7\right| = \aleph_0 \neq c = |\mathbb{R}| \quad \Longrightarrow$ nem létezik bijekció
- $|\mathbb{R}| = c \neq \aleph_0 = \left|\mathbb{N}^2\right| \quad \Longrightarrow$ nem létezik bijekció

7. kérdés

(7) Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa?

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	−1 ○	−2 ○	−3 ○	egyéb ○	!

7. feladat

Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa?

7. kérdés

7. feladat

Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa?

Megoldás:

Kifejtem a determinánst a második oszlopa szerint:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 0. \end{aligned}$$

8. kérdés

(8) Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van? (Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	8 ○	!

8. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van? (Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

8. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van?

(Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

Megoldás:

$$\begin{array}{c|c|} & A \\ \hline A & A \cdot A = A^2 \\ \hline \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc|} & & & -1 & 2 & 1 \\ & & & 2 & 1 & 3 \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

9. kérdés

(9) Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.	! igen ○ nem ○ !
A mátrix megegyezik a transzponáltjával.	! igen ○ nem ○ !
A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.	! igen ○ nem ○ !

9. feladat

Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

- A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.
- A mátrix megegyezik a transzponáltjával.
- A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

9. kérdés

9. feladat

Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

- A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.
- A mátrix megegyezik a transzponáltjával.
- A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

Megoldás:

- Biztosan NEM nulla. (Paralelepipedon.)
- Semmi releváns információ nincs a kijelentésben a feladat szempontjából.
- Biztosan nulla. (Kifejtjük a csupa nulla oszlop szerint.)

10. kérdés

(10) Az $\mathbf{R}^5$-ben tekintsük az $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$ részhalmazt. Hánydimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	egyéb ○	!

10. feladat

Az $\mathbb{R}^5$-ben tekintsük az
$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$
részhalmazt. Hány dimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

10. kérdés

10. feladat

Az $\mathbb{R}^5$-ben tekintsük az
$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$
részhalmazt. Hány dimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

Hint

A tanár úr már gondolt rá.

Megoldás:
Megoldjuk az egyenletet (egyenletrendszert), és a szabad változók száma adja a megoldásaltér dimenzióját. Most látható, hogy 4 szabadismeretlen van, tehát az S altér 4-dimenziós.

Tartalom

1. Teljes feladatsor #1
2. Teljes feladatsor #2
3. Teljes feladatsor #3
4. Teljes feladatsor #4
5. Válogatott feladatok
6. Végső bölcsesség

1. kérdés

(1) Legyen $A = \{0,1,3,4,5\}$ és $\rho = \{(x,y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ○	reflexív ○	részbenrendezés ○	egyik sem ○	?

1. feladat

Legyen $A = \{0,1,3,4,5\}$ és $\rho = \left\{(x,y) \in A^2 : x - y = 1\right\} \subseteq A^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus	reflexív	részbenrendezés	egyik sem	?

1. kérdés

1. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ és $\rho = \big\{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\big\} \subseteq A^2$.
Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus	reflexív	részbenrendezés	egyik sem	?

Megoldás:

- Antiszimmetrikus, mert $(a, b) \in \rho$ és $(b, a) \in \rho$ egyszerre nem is teljesülhet. (Logika - implikáció: $h \rightarrow$bármi $=$ igaz.)
- Nem reflexív, mert bármely $a \in A$ esetében $a - a = 0$, azaz $(a, a) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mivel nem is reflexív. (Egyébként nem is tranzitív.)

2. kérdés

(2) Legyen $A = P(\{1,2\})$ és $B = P(\{2,3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $P(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯	6 ◯	7 ◯	egyik sem ◯	!

2. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\{1,2\})$ és $B = \mathcal{P}(\{2,3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

2. kérdés

2. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\{1,2\})$ és $B = \mathcal{P}(\{2,3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

Hint

Egyszerűen meg kell adni $A \triangle B$-t.

Megoldás:

- $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $B = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{\{1\}, \{1,2\}\} \cup \{\{3\}, \{2,3\}\} = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

3. kérdés

(3) Alteret alkotnak-e $\mathbf{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$	igen ○	nem ○
$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 25\}$	igen ○	nem ○
$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$	igen ○	nem ○

3. feladat

Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$

3. kérdés

3. feladat

Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$

Hint

Mit mondtam utolsó órán az alterekről?

Megoldás:

- Igen, mert minden homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere altér.
- Nem altér, mert nincs benne a nullvektor.
- Nem altér, mert nincs benne a nullvektor.

4. kérdés

(4) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ○	5 ○	7 ○	1 ○	4 ○	0 ○	-5 ○	más számérték ○	nincs értelmezve ○	!

4. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T-tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

Hint

Igen speciális mátrixszorzást kell végrehajtani, de ne ijedjünk meg tőle.

Megoldás:

- $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
-

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$

5. kérdés

(5) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{4\times4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\vec{x} = \vec{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A, és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbf{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

Ha A-nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.	! igen ◯	nem ◯ !
Ha A-nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.	! igen ◯	nem ◯ !
Ha A-nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.	! igen ◯	nem ◯ !

5. feladat

Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{4\times4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A, és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbb{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.
- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.
- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.

5. kérdés

5. feladat

Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = \left(a_{ij}\right)_{4\times 4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A, és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbb{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.
- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.
- Ha A-nak van inverze, akkor az $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.

Megoldás:

- A-nak van inverze
- $\Longrightarrow \det(A) \neq 0$
- $\Longrightarrow$ A sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak
- $\Longrightarrow$ A-ban Gauss-elimináció során nem tűnik el sor
- $\Longrightarrow$ A lépcsős alaknak 4 sora van.
- $\Longrightarrow$ Nincs szabadismeretlen.
- $\Longrightarrow$ A megoldásaltér dimenziója nulla.

6. kérdés

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$\big(\neg(\exists x)(\exists y)\big(\neg A(x) \vee \neg B(y)\big)\big) \leftrightarrow \big((\forall x)(\forall y)\big(A(x) \wedge B(y)\big)\big)$

! igen ○ nem ○ !

$((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$

! igen ○ nem ○ !

6. feladat

Tautológiák-e az alábbi formulák?

- $(\neg (\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)))$
- $((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$

6. kérdés

6. feladat

Tautológiák-e az alábbi formulák?

- $(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)))$
- $((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$

Hint

Az egyik predikátum-, a másik ítéletkalkulusbeli formula.

Megoldás:

- Tautológia: a $\leftrightarrow$ két oldalán egymással ekvivalens formulák állnak. (Ugyanaz a tagadás, más formában.)
- Ha nincs jobb ötlet: igazságtábla, és megnézni, hogy mindenhol igaz jön-e ki. NEM.

7. kérdés

(7) Legyen $f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^2$, $x \mapsto (x-1, x+1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ○	g szürjektív ○	g injektív ○	egyik sem ○	?

7. feladat

Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x-1, x+1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív	g szürjektív	g injektív	egyik sem	?

7. kérdés

7. feladat

Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x-1, x+1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív	g szürjektív	g injektív	egyik sem	?

Megoldás:

- f nem injektív. Ellenpélda: $(1,4) \mapsto 5$, $(2,3) \mapsto 5$ DE $(1,4) \neq (2,3)$.
- g nem szürjektív. A $(0,0)$-nak nincs őse.
- g injektív. Definíció szerint könnyen kijön.

8. kérdés

(8) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbf{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ◯	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ◯	$\vec{a}, \vec{b}$ ◯	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ ◯	egyik sem ◯	?

8. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\overrightarrow{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\overrightarrow{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$	$\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$	$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{0}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}$	egyik sem	?

8. kérdés

8. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\overrightarrow{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\overrightarrow{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$	$\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$	$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{0}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}$	egyik sem	?

Hint

Standard feladat, nincs szükség segítségre.

Megoldás:

- Lineárisan függő.
- Lineárisan független.
- Lineárisan független.
- Lineárisan függő.

9. kérdés

(9) Legyen $A = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0,2,3\},\{1,2,3\},\{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset),\{1\},\{3,4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$ ○	$\mathcal{D}$ ○	$\mathcal{E}$ ○	egyik sem ○	?

9. feladat

Legyen $A = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0,2,3\},\{1,2,3\},\{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset),\{1\},\{3,4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül, melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	?

9. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül, melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	?

Hint

Hogy néz ki az osztályozás?

Megoldás:

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás (a 2-es két blokkban szerepel)
- $\mathcal{E}$ nem osztályozás (a 2-es biztos nem szerepel egy blokkban sem)

10. kérdés

(10) Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám? Pontosabban, az A^{-1} -ben **hány helyen** van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1}, akkor az „egyéb" lehetőséget jelölje meg.

!	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	7 ○	8 ○	9 ○	egyéb ○	!

10. feladat

Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám? Pontosabban, az A^{-1}-ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1}, akkor az „egyéb" lehetőséget jelölje meg.

10. feladat

Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám? Pontosabban, az A^{-1}-ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1}, akkor az „egyéb'' lehetőséget jelölje meg.

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tartalom

1 Teljes feladatsor #1

2 Teljes feladatsor #2

3 Teljes feladatsor #3

4 Teljes feladatsor #4

5 Válogatott feladatok

6 Végső bölcsesség

1. kérdés

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$A \times \overline{A} = \emptyset$	!	igen ○	nem ○	!
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	!	igen ○	nem ○	!
$A \triangle A = A$	!	igen ○	nem ○	!

1. feladat

Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

- $A \times \overline{A} = \emptyset$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $A \triangle A = A$

1. kérdés

1. feladat

Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

- $A \times \overline{A} = \emptyset$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $A \triangle A = A$

Megoldás:

- Hamis. Triviális.
- Igaz: a metszet disztributív az unióra nézve. (Fordítva is igaz.)
- Hamis: $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.

2. kérdés

(2) Legyen $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x,y) \mapsto (y,x), \qquad \beta : A \to A,\ (x,y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbf{Z},\ (x,y) \mapsto x+y, \qquad \delta : \mathbf{Z} \to A,\ x \mapsto (x,-x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	α ○	β ○	γ ○	δ ○	egyik sem ○	?

2. feladat

Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x,y) \mapsto (y,x), \qquad \beta : A \to A,\ (x,y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbb{Z},\ (x,y) \mapsto x+y, \qquad \delta : \mathbb{Z} \to A,\ x \mapsto (x,-x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

2. kérdés

2. feladat

Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \to A,\ (x,y) \mapsto (y,x), \qquad \beta : A \to A,\ (x,y) \mapsto (x^3, -y),$$
$$\gamma : A \to \mathbb{Z},\ (x,y) \mapsto x+y, \qquad \delta : \mathbb{Z} \to A,\ x \mapsto (x,-x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

Megoldás:

- α injektív. Definíció szerint könnyen kijön.
- β injektív. Definíció szerint könnyen kijön.
- γ nem injektív. Ellenpélda: $(2,3) \mapsto 5$, $(1,4) \mapsto 5$ DE $(2,3) \neq (1,4)$.
- δ injektív. Definíció szerint könnyen kijön.

3. kérdés

(3) Legyen $\mathcal{C} = \{\{1,5,6\},\{0,4\},X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ halmazon?

!	$\emptyset$ ○	$\{2\}$ ○	$\{\emptyset,3\}$ ○	$\{2,3\}$ ○	$\{3,4,5\}$ ○	egyik sem ○	!

3. feladat

Legyen $\mathcal{C} = \{\{1,5,6\},\{0,4\},X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ halmazon?

!	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{\emptyset,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3,4,5\}$	egyik sem	!

3. kérdés

3. feladat

Legyen $\mathcal{C} = \{\{1,5,6\}, \{0,4\}, X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ halmazon?

!	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{\emptyset, 3\}$	$\{2,3\}$	$\{3,4,5\}$	egyik sem	!

Hint

Hogy néz ki az osztályozás?

Megoldás: Triviális: $\{2,3\}$.

4. kérdés

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbf{Z}^2$ halmazon	! igen ◯ nem ◯ !
$\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbf{Z}$ halmazon	! igen ◯ nem ◯ !
$\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbf{Z}$ halmazon	! igen ◯ nem ◯ !

4. feladat

Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

- $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon
- $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon
- $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

4. feladat

Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

- $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon
- $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon
- $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

Megoldás:

- Nem, mivel nem antiszimmetrikus. Ellenpélda: $((-1, 1), (-2, 2))$ és $((-2, 2), (-1, 1))$ is benne van, de $(-1, 1) \neq (-2, 2)$.
- Nem, mivel nem antiszimmetrikus. Ellenpélda: $(-2, 2)$ és $(2, -2)$ is benne van, de $-2 \neq 2$.
- Igen, részbenrendezés.

5. kérdés

(5) Legyen $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ○	$S \times \mathbf{N}$ ○	$S \cup \mathbf{Z}$ ○	$\mathbf{R}$ ○	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ ○	egyik sem ○	?

5. feladat

Legyen $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\right\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

S	$S \times \mathbb{N}$	$S \cup \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	egyik sem

5. feladat

Legyen $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\right\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

S	$S \times \mathbb{N}$	$S \cup \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	egyik sem

Hint

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0, \ |\mathbb{R}| = c$
Számosságaritmetika alaptétele.

Megoldás:

- $|S| = \aleph_0$
- $|S \times \mathbb{N}| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$
- $|S \cup \mathbb{Z}| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$
- $|\mathbb{R}| = c$
- $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = c$

6. kérdés

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \to (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak száma.)

!	0 ◯	1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯	6 ◯	7 ◯	8 ◯	!

6. feladat

Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \to (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak száma.)

6. kérdés

6. feladat

Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az $A \to (B \leftrightarrow C)$ formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak száma.)

Megoldás:

A	$\to$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

$\Longrightarrow$ 6 „igaz-sor”

$\Longrightarrow$ 6 klóz (zárójeles tag a TDNF-ben)

$\Longrightarrow$ 5 darab $\vee$-jel

7. kérdés

(7) Melyik a $(\forall x)\Big((\exists y)B(y) \to (\forall z)A(x,z)\Big)$ formula **negáltjával** ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$
\begin{array}{ll}
F: & (\forall x)\Big((\forall z)A(x,z) \to (\exists y)B(y)\Big) \\
G: & (\exists x)\Big((\forall y)(\neg B(y)) \to (\exists z)(\neg A(x,z))\Big) \\
H: & (\exists x)\Big((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x,z))\Big).
\end{array}
$$

!	F ○	G ○	H ○	egyik sem ○	!

7. feladat

Melyik a $(\forall x)\,((\exists y)\,B(y) \to (\forall z)\,A(x,z))$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$
\begin{array}{ll}
F: & (\forall x)\,((\forall z)\,A(x,z) \to (\exists y)\,B(y)) \\
G: & (\exists x)\,((\forall y)\,(\neg B(y)) \to (\exists z)\,(\neg A(x,z))) \\
H: & (\exists x)\,((\exists y)\,B(y) \wedge (\exists z)\,(\neg A(x,z)))
\end{array}
$$

7. kérdés

7. feladat

Melyik a $(\forall x)\,((\exists y)\,B(y) \rightarrow (\forall z)\,A(x,z))$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$
\begin{aligned}
F: &\quad (\forall x)\,((\forall z)\,A(x,z) \rightarrow (\exists y)\,B(y))\\
G: &\quad (\exists x)\,((\forall y)\,(\neg B(y)) \rightarrow (\exists z)\,(\neg A(x,z)))\\
H: &\quad (\exists x)\,((\exists y)\,B(y) \wedge (\exists z)\,(\neg A(x,z)))
\end{aligned}
$$

Hint

MELYIK...

Megoldás: H

8. kérdés

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbf{R}^3$-beli

$$(1,1,2),\ (2,1,t),(1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ○	1 ○	3 ○	5 ○	7 ○	−1 ○	−3 ○	−5 ○	egyéb ○	!

8. feladat

Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1,1,2)\,,\ (2,1,t)\,,\ (1,2,1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

8. kérdés

8. feladat

Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1, 1, 2), \ (2, 1, t), \ (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

Hint

Standard feladat, csak van benne egy paraméter.

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & t-4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & t-4 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$$

Lin. függő $\iff$ tűnik el sor $\iff$ $t = 5$.

9. kérdés

(9) Legyen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ egy vektorrendszer az $\mathbf{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a „lin." a „lineárisan" rövidítése)?

Ha $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ lin. független, akkor $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \neq \vec{0}$.	!	igen ○	nem ○	!
Ha $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, hogy $\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$.	!	igen ○	nem ○	!
Ha $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ lin. függő, akkor $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$ is lin. függő.	!	igen ○	nem ○	!

9. feladat

Legyen $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e szükségképpen az alábbi állítások (a „lin." a „lineárisan" rövidítése)?

- Ha $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ lin. független, akkor $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} \neq \overrightarrow{0}$.
- Ha $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $\overrightarrow{v_3} = \lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_2}$.
- Ha $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ lin. függő, akkor $\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}$ is lin. függő.

9. kérdés

9. feladat

Legyen $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e szükségképpen az alábbi állítások (a „lin." a „lineárisan" rövidítése)?

- Ha $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ lin. független, akkor $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} \neq \overrightarrow{0}$.
- Ha $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $\overrightarrow{v_3} = \lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}$.
- Ha $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ lin. függő, akkor $\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}$ is lin. függő.

Megoldás:

- Igaz.
- Nem igaz.
- Igaz.

10. kérdés

(10) Legyen $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Melyik a C^{-1} mátrix legnagyobb abszolút értékű eleme?

!	-2 ○	1 ○	2 ○	3 ○	-12 ○	-7 ○	-4 ○	$-\frac{17}{2}$ ○	egyéb ○	!

10. feladat

Legyen $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Melyik a C^{-1} mátrix legnagyobb abszolút értékű eleme?

10. kérdés

10. feladat

Legyen $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Melyik a C^{-1} mátrix legnagyobb abszolút értékű eleme?

Megoldás:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Tartalom

1. Teljes feladatsor #1
2. Teljes feladatsor #2
3. Teljes feladatsor #3
4. Teljes feladatsor #4
5. Válogatott feladatok
6. Végső bölcsesség

1. kérdés

(1) Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbf{Z}$-n értelmezett $\rho = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^2 \leq y^2\} \subseteq \mathbf{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus ◯	antiszimmetrikus ◯	reflexív ◯	tranzitív ◯	egyik sem ◯	?

1. feladat

Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbb{Z}$-n értelmezett $\rho = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\right\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	tranzitív	egyik sem	?

1. feladat

Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbb{Z}$-n értelmezett $\rho = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\right\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	tranzitív	egyik sem	?

Megoldás:

- Nem szimmetrikus: $(0,1) \in \rho$ de $(1,0) \notin \rho$.
- Nem antiszimmetrikus: $(-1,1) \in \rho$, $(1,-1) \in \rho$ de $1 \neq -1$.
- Reflexív: minden $x \in \mathbb{Z}$-re $(x,x) \in \rho$, mert $x^2 \leq x^2$.
- Tranzitív: $x^2 \leq y^2$-ből és $y^2 \leq z^2$-ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$.

2. kérdés

(2) Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3-i)z = 5+5i$. Mennyi z **képzetes része** (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

!	-3 ○	-2 ○	-1 ○	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	egyik sem ○	!

2. feladat

Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3-i)z = 5+5i$. Mennyi z képzetes része (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

2. kérdés

2. feladat

Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3-i)z = 5+5i$. Mennyi z képzetes része (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

Hint

Úgy kell megoldani, mint egy középiskolai lineáris egyenletet.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
(3-i)z &= 5+5i \\
z &= \frac{5+5i}{3-i} \\
z &= \frac{5+5i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{10+20i}{10} \\
z &= 1+2i
\end{aligned}$$

3. kérdés

(3) Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyéb ○	!

3. feladat

Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

3. feladat

Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \to (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

Megoldás:
Igazságtáblázat $\Rightarrow$ megnézni hány különböző kiértékelésre igaz (a 8-ból) $\Rightarrow$ez lesz a diszjunkció tagjainak a száma.
Másik megoldás:

$$\begin{aligned} A \to (B \vee (\neg C)) &= h \\ A = i \quad &\& \quad B \vee (\neg C) = h \\ & \qquad B = h \,\&\, \neg C = h \\ & \qquad B = h \,\&\, C = i \end{aligned}$$

A formula 1 darab kiértékelésre hamis, tehát 7 darabra igaz. Így a $\vee$ jelek száma 6.

4. kérdés

(4) Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek **összege** az alábbiak közül:

!	$-\infty$ ○	-4 ○	0 ○	1 ○	3 ○	6 ○	10 ○	∞ ○	egyik sem ○	!

4. feladat

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek összege az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek összege az alábbiak közül?

Hint

Elég speciális a mátrix alakja.

Megoldás:

Trianguláris mátrix sajátértékei a főátlóban lévő elemei.

5. kérdés

(5) Mekkora annak a parallelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1,1,0)$, $(0,2,2)$ és $(1,0,1)$ pontok?

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!

5. feladat

Mekkora annak a parallelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1,1,0)$, $(0,2,2)$, és $(1,0,1)$ pontok?

5. feladat

Mekkora annak a parallelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 2)$, és $(1, 0, 1)$ pontok?

Hint

Ez egy alkalmazása a determinánsoknak.

Megoldás:

Felírjuk a determinánst, és kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 - (-2) = 4 \end{aligned}$$

6. kérdés

(6) Igazak-e az alábbiak:

$\mathbf{R} \times \mathbf{N}$ megszámlálhatóan végtelen. | ! igen ○ | nem ○ ! |

$|\mathbf{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság. | ! igen ○ | nem ○ ! |

$|\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}| = \aleph_0$. | ! igen ○ | nem ○ ! |

6. feladat

Igazak-e az alábbiak?

- $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.
- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

6. feladat

Igazak-e az alábbiak?

- $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.
- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Hint

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = c$.
Számosságaritmetika alaptétele.

Megoldás:

- Hamis: $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \max\{c, \aleph_0\} = c$.
- Igaz.
- Igaz: $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$.

7. kérdés

(7) Az alábbi

$$
\begin{array}{ll}
A: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz\big) \\
B: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf\big) \\
C: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg\big)
\end{array}
$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

!	A ○	B ○	C ○	egyik sem ○	!

7. feladat

Az alábbi

$$
\begin{array}{ll}
A: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz\big) \\
B: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf\big) \\
C: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg\big)
\end{array}
$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

7. kérdés

7. feladat

Az alábbi

$$\begin{array}{ll} A: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz) \\ B: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf) \\ C: & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg) \end{array}$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

Hint

- MELYIK...?
- Fordított lengyel jelölés = postfix ábrázolás.
- Használjunk konkrét f és g-t, például szorzást és összeadást.

7. feladat'

Melyik formula fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

Megoldás:

- Infix ábrázolás:

$$
\begin{aligned}
x \cdot (y + z) &= (x \cdot y) + (x \cdot z) \\
xf(ygz) &= (xfy)g(xfz)
\end{aligned}
$$

- Postfix ábrázolás:

$$
\begin{aligned}
xyz + \cdot &= xy \cdot xz \cdot + \\
xyzgf &= xyfxzfg
\end{aligned}
$$

- Ez már elég? Nem.
- Válasz: C.

8. kérdés

(8) Legyen $\vec{a} = (3,2,0,1)$, $\vec{b} = (-1,1,2,1)$, $\vec{v} = (12,3,-6,0) \in \mathbf{R}^4$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ alakban ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható **összege**) az alábbiak közül?

!	1 ◯	2 ◯	3 ◯	−1 ◯	0 ◯	−2 ◯	−3 ◯	−5 ◯	egyéb ◯	!

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

8. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (3,2,0,1)$, $\overrightarrow{b} = (-1,1,2,1)$, $\overrightarrow{v} = (12,3,-6,0) \in \mathbb{R}^4$. Írjuk fel a $\overrightarrow{v}$ vektort $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$ alakban ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható összege) az alábbiak közül?

8. kérdés

8. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (3,2,0,1)$, $\overrightarrow{b} = (-1,1,2,1)$, $\overrightarrow{v} = (12,3,-6,0) \in \mathbb{R}^4$. Írjuk fel a $\overrightarrow{v}$ vektort $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$ alakban ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható összege) az alábbiak közül?

Hint

Standard módszer vs. gondolkozzunk vs. vegyük észre.

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 3 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

9. kérdés

(9) Legyen $\vec{a} = (1, -1, 2)$ és $\vec{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\vec{a} \times \vec{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

!	$(-5, 2, -1)$ ○	$(-3, -5, -1)$ ○	$(-9, -9, 9)$ ○	$(9, -9, -9)$ ○	$(3, 7, 5)$ ○	egyik sem ○	!

9. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)$ és $\overrightarrow{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

9. feladat

Legyen $\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)$ és $\overrightarrow{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

Hint

Csak tudni kell mi az a vektoriális szorzás.

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= i \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -3i - 5j - k = (-3, -5, -1)
\end{aligned}
$$

10. kérdés

(10) Jelölje be a téglalapban felsorolt elemek közül azokat, amelyek szerepelnek (egyszer vagy többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében!

?	-3 ○	-2 ○	-1 ○	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	egyik sem szerepel ○	?

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

10. feladat

Jelölje be a téglalapban felsorol elemek közül azokat, amelyek szerepelnek (egyszer vagy többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében!

10. feladat

Jelölje be a téglalapban felsorol elemek közül azokat, amelyek szerepelnek (egyszer vagy többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében!

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tartalom

1. Teljes feladatsor #1
2. Teljes feladatsor #2
3. Teljes feladatsor #3
4. Teljes feladatsor #4
5. Válogatott feladatok
6. Végső bölcsesség

1. kérdés

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbf{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$	!	igen ○	nem ○	!
$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$	!	igen ○	nem ○	!
$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^3 = 23\}$	!	igen ○	nem ○	!

1. feladat

Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 = 23\}$

1. feladat

Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 = 23\}$

Megoldás:

- Nem, mert nincs benne a nullvektor.
- Igen. Minden homogén egyenlet(rendszer) megoldásai alteret alkotnak.
- Nem, mert nincs benne a nullvektor.

2. kérdés

(6) Melyik lesz sajátértéke a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○	egyik sem ○	?

2. feladat

Melyik lesz a sajátértéke a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak az alábbiak közül?

2. kérdés

2. feladat

Melyik lesz a sajátértéke a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak az alábbiak közül?

Hint

Főátlóból kivonok x-et, veszem az így kapott mátrix determinánsát, ami egy polinom, és ezen polinom gyökei a sajátértékek.

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 3 \cdot 2 = x^2 - 7x$$

$$x^2 - 7x = 0 \iff x = 0 \,\text{vagy}\, x = 7$$

3. kérdés

(8) Legyen $A := \{0, 1, \ldots, 8\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, $\beta := \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma := A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

?	tranzitív ◯	antiszimmetrikus ◯	dichotom ◯	egyik sem ◯	?

3. feladat

Legyen $A = \{0, 1, \ldots, 8\}$, $\alpha = \left\{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\right\} \subseteq A^2$, $\beta = \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma = A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

tranzitív	antiszimmetrikus	dichotom	egyik sem

3. kérdés

3. feladat

Legyen $A = \{0, 1, \ldots, 8\}$, $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, $\beta = \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma = A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

tranzitív	antiszimmetrikus	dichotom	egyik sem

Hint

Legalább az alaphalmaz véges.

Megoldás:

- $\alpha =$ „legfeljebb 5 távolságra vannak”
- $\alpha^{-1} = \alpha$
- $\beta =$ „legfeljebb 10 távolságra vannak” $= A^2$
- $\gamma = \emptyset$

$\Longrightarrow \gamma$ tranzitív, antiszimmetrikus, nem dichotóm.

4.kérdés

(9) Az X mátrixról annyit tudunk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ ○	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ○	egyik sem ○	!

4.feladat

Az X mátrixról annyit tudunk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

4. kérdés

4. feladat

Az X mátrixról annyit tudunk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

Hint

Találomra el is kezdhetünk behelyettesíteni.

Megoldás:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. kérdés

(1) Legyen $A = \{0,1,2\}$, $\alpha = \{(0,1),(0,2),(1,2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0,2)\} \subseteq A^2$. Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	A^2 ◯	$A^2 \setminus \alpha$ ◯	$\emptyset$ ◯	α ◯	β ◯	egyik sem ◯	!

5. feladat

Legyen $A = \{0,1,2\}$, $\alpha = \{(0,1),(0,2),(1,2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0,2)\} \subseteq A^2$. Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

A^2	$A^2 \setminus \alpha$	$\emptyset$	α	β	egyik sem

5. kérdés

5. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$. Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

A^2	$A^2 \setminus \alpha$	$\emptyset$	α	β	egyik sem

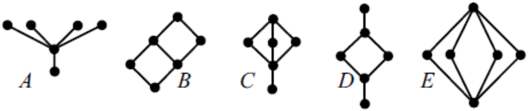
Hint

Relációszorzás „=” egymás utáni végrehajtás.

Megoldás: $\emptyset$

6. kérdés

(4) Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?



?	A ○	B ○	C ○	D ○	E ○	egyiknek sincs ○	?

6. feladat

Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?

Megoldás: Mindnek van.

7. kérdés

(6) Legyen

$$\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases},$$
$$\beta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad x \mapsto x + 1 \quad .$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

?	α szürjektív ◯	β injektív ◯	β szürjektív ◯	az előzőek egyike sem ◯	?

7. feladat

Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases},$$
$$\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

α szürjektív	β injektív	β szürjektív
az előzőek egyike sem		

7. kérdés

7. feladat

Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases},$$

$$\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

α szürjektív	β injektív	β szürjektív
az előzőek egyike sem		

Megoldás:

- α szürjektív, mert az x tetszőleges természetes szám őse (például) az $x + 1$ szám.
- β injektív, mert ha $x + 1 = y + 1$, akkor $x = y$.
- β nem szürjektív, mivel az 1-nek nincs őse.

8. kérdés

(7) Legyen $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $x \mapsto (x^2+5, x^2+1)$, és $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $(x,y) \mapsto x-y$. Igazak-e az alábbiak:

„$\varphi\psi$ szürjektív.”	! igen ○	nem ○ !
„φ injektív.”	! igen ○	nem ○ !
„ψ szürjektív.”	! igen ○	nem ○ !

8. feladat

Legyen $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \left(x^2+5, x^2+1\right)$, és $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \mapsto x-y$. Igazak-e az alábbiak:

- „$\varphi\psi$ szürjektív.”
- „φ injektív.”
- „ψ szürjektív.”

8. kérdés

8. feladat

Legyen $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ x \mapsto \left(x^2 + 5, x^2 + 1\right)$, és $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak:

- „$\varphi\psi$ szürjektív.”
- „φ injektív.”
- „ψ szürjektív.”

Megoldás:

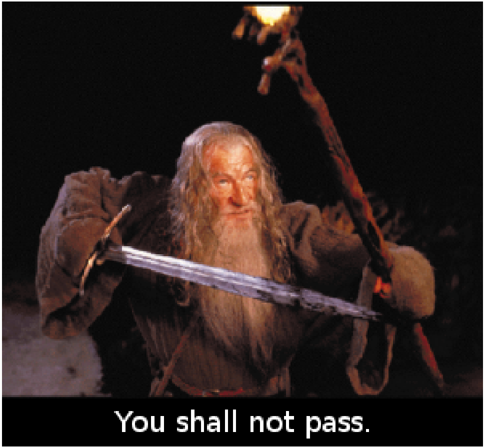
- φ injektív, mert „koordinátánként” injektív.
- ψ szürjektív, mert egy negatív x egész szám őse például a $(0, |x|)$ számpár, pozitív egész x esetén az őse például $(x, 0)$, és a nullának is végtelen sok őse van.
- $\varphi\psi$ nem szürjektív. Nem létezik olyan $x \in \mathbb{N}$, melyre $x\,(\varphi\psi) = 0$.

Tartalom

1. Teljes feladatsor #1
2. Teljes feladatsor #2
3. Teljes feladatsor #3
4. Teljes feladatsor #4
5. Válogatott feladatok
6. Végső bölcsesség

Tanács

If you don't study...



... the exam.