

VEKTOROK, VEKTORTÉR

Vektorok, vektorműveletek, vektortér,
lineáris független vektorrendszerek.

1. Vektorműveletek

1. Definíció. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és a $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ két \mathbb{R}^3 -beli vektor, és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár. Ekkor értelmezzük a vektorok **összeadását** és **skalárszorosságát**:

- $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \in \mathbb{R}^3$,
- $c\underline{a} = (ca_1, ca_2, ca_3) \in \mathbb{R}^3$.

2. Tétel. A sík vagy a tér tetszőleges $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ szabadvektoraira és tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ skalárookra

- $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$,
- $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$,
- $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$,
- $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$,
- $c(\underline{a} + \underline{b}) = c\underline{a} + c\underline{b}$,
- $(c + d)\underline{a} = c\underline{a} + d\underline{a}$,
- $c(d\underline{a}) = (cd)\underline{a}$,
- $1\underline{a} = \underline{a}$,
- $0\underline{a} = c\underline{0} = \underline{0}$.

3. Definíció. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy \mathbb{R}^3 -beli vektor. Ekkor az \underline{a} **hosszát** $|\underline{a}|$ -val jelöljük, és a következő módon számoljuk ki:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

4. Megjegyzés. Természetesen az előző definícióhoz hasonló megfogalmazható 2-dimenziós vektorokra, és 3-nál magasabb dimenziós vektorokra is.

5. Definíció. Az \underline{a} és \underline{b} vektorok **skaláris szorzatán** a

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\underline{a}, \underline{b})$$

szorzatot értjük, ahol $\cos(\underline{a}, \underline{b})$ az \underline{a} és a \underline{b} vektor által bezárt szög koszinusza.

6. Tétel. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és a $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ két \mathbb{R}^3 -beli vektor. Ekkor

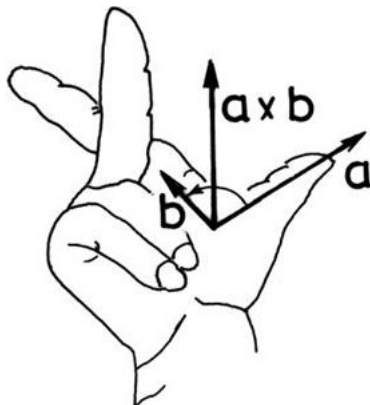
$$\underline{a}\underline{b} = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

7. Megjegyzés. A skaláris szorzásra vonatkozó tétel természetes módon átalakítható magasabb dimenzióra is.

8. Definíció. Legyen az \underline{a} és a \underline{b} két \mathbb{R}^3 -beli vektor. Ekkor $\underline{a} \times \underline{b}$ jelöli azt a vektort, amely a két vektor **vektoriális szorzatának** eredménye. Erre az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorra teljesül, hogy

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin(\underline{a}, \underline{b}),$$

valamint, hogy $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges az \underline{a} és a \underline{b} vektorra is, és az irányát a jobbkéz-szabály határozza meg:



9. Tétel. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ két \mathbb{R}^3 -beli vektor. Ekkor

$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \underline{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \underline{k}(a_1b_2 - a_2b_1). \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

10. *Megjegyzés.* A skaláris szorzattal ellentétben a vektoriális szorzat már nem terjeszthető ki magasabb dimenziókra.

11. Definíció. Legyen az $\underline{a}, \underline{b}$ és \underline{c} három \mathbb{R}^3 -beli vektor. Ekkor az

$$\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle$$

mennyiséget a három vektor **vegyes szorzatának** nevezzük.

12. Tétel. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ három \mathbb{R}^3 -beli vektor. Ekkor

$$\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

13. Példa. $\underline{a} = (2, 6, -1)$, $\underline{b} = (-3, -9, 8)$, $\underline{c} = (5, 3, -2)$

- $\underline{a} + \underline{b} = (2 - 3, 6 - 9, -1 + 8) = (-1, -3, 7)$
- $4\underline{a} = (4 \cdot 2, 4 \cdot 6, 4 \cdot (-1)) = (8, 24, -4)$
- $\underline{a}\underline{b} = 2 \cdot (-3) + 6 \cdot (-9) + (-1) \cdot 8 = -68$
- $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -9 & 8 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -9 & 8 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = (39, -13, 0)$
- $\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & -9 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 36 + 9 + 240 - 45 - 36 - 48 = 156$

2. Vektortér

14. Definíció. A T számtest feletti vektortér egy olyan $(V, +, \cdot)$ struktúra, melyre tetszőleges $u, v, w \in V$ és $c, d \in T$ esetén teljesül az alábbi 8 axióma:

- | | | |
|----------------------------------|--|----------------------|
| 1. $u + v = v + u$. | 4. Létezik additív inverz (ellentett). | 7. $(cd)u = c(du)$. |
| 2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. | 5. $c(u + v) = cu + cv$. | 8. $1u = u$. |
| 3. Létezik 0-vektor. | 6. $(c + d)u = cu + du$. | |

15. Definíció. Legyen V egy T számtest feletti vektortér. Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}_0$, $v_1, \dots, v_n \in V$, és $c_1, \dots, c_n \in T$. Ekkor a

$$v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n = \sum_{i=1}^n c_iv_i$$

vektort a $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorok c_1, \dots, c_n együtthatókkal képzett **lineáris kombinációjának** nevezzük. Ha minden c_i együttható nulla, akkor **triviális lineáris kombinációról** beszélünk.

16. Példa. Legyenek $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a tér x, y, z tengely irányába eső egységvektorai. Ekkor a tér tetszőleges $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektora felírható ezen egységvektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$.

17. Definíció. Legyen V egy T számtest feletti vektortér. A V elemeiből képzett véges rendszereket **vektorrendszereknek** nevezzük. Egy ilyen v_1, \dots, v_k vektorrendszer **lineárisan független**, ha a zérusvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő, azaz bármely $c_1, \dots, c_k \in T$ esetén,

$$\text{ha } c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0, \text{ akkor } c_1 = \dots = c_k = 0.$$

Ellenkező esetben a vektorrendszert **lineárisan függőnek** nevezzük.

18. Példa. Ha egy vektorrendszer tartalmazza a nullvektort, vagy egynél többször valamely vektort, akkor lineárisan függő. A térbeli $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorrendszer lineárisan független.

19. Tétel. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ három \mathbb{R}^3 -beli vektor. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszerből alkotott $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ determináns nulla.

20. Példa. Független-e az alábbi három vektor:

$$\underline{a} = (-2; 1; 0), \quad \underline{b} = (4; 0; 2), \quad \underline{c} = (0; -1; -5)?$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \\ = -2(0 - (-2)) - 1(-20 - 0) = -4 + 20 = 16$$

Mivel a determináns nem nulla, a három vektor lineárisan független.

21. Példa. Lineárisan függő-e az alábbi három vektor:

$$\underline{a} = (-3; 0; 1; 2), \quad \underline{b} = (-1; 2; 0; 0), \quad \underline{c} = (-2; -2; 1; 2)?$$

Ez determináns számolással nem dönthető el, tehát Gauss-eliminációval kell megoldani feladatot.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) : Az 1. és 2. sort megcseréljük.

(2) : Az 1. sor (-3)-szorosát hozzáadom a 2. sorhoz.

(3) : Az 1. sor (-2)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.

(4) : A 2. sor (-1)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.

(5) : Elhagyom a 3. csupa nulla sort.

Mivel kevesebb sorom maradt (a vektorrendszer rangja kettő), mint ahány vektorból indultam, ezért a vektorrendszer lineárisan függő.

22. Példa. Lineárisan függő-e az alábbi három vektor:

$$\underline{a} = (-1; 2; 0; 0), \quad \underline{b} = (-2; -2; 1; 2), \quad \underline{c} = (1; 2; 1; 2)?$$

Ez determináns számolással nem dönthető el, tehát Gauss-eliminációval kell megoldani feladatot.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{10}{6} & \frac{20}{6} \end{pmatrix}$$

(1) : Az 1. sor (-2)-szeresét hozzáadom a 2. sorhoz.

(2) : Az 1. sor 1-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.

(3) : A 2. sort osztom 6-tal.

(4) : A 2. sor 4-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.

Mivel ugyanannyi sorom maradt (a vektorrendszer rangja három), mint ahány vektorból indultam, ezért a vektorrendszer lineárisan független.