Mátrixok

Mátrixok. Mátrixműveletek és tulajdonságaik.

1. Mátrixok

1. Definíció. Az M **mátrix** egy T test elemeiből álló táblázat, m darab sorral és n darab oszloppal. Az ilyen paraméterekkel rendelkező mátrixot $M_{m\times n}$-nel jelöljük. Az M mátrix i-edik sorának j-edik **elem**ét m_{ij}-vel jelöljük.

2. Példa. Legyen M az alábbi mátrix:

$$M_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 0.75 \\ \pi & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 6 & -7.2 & 9\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor például $m_{13} = \sqrt{2}$.

3. Definíció. Az $(n \times n)$-es **egységmátrix** olyan mátrix, amelynek a főátlója 1-eket tartalmaz, a többi eleme, pedig nulla:

$$I_n = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Definíció. Az $(n \times n)$-es **nullmátrix** olyan mátrix, amely csak nulla elemeket tartalmaz:

$$Z_n = O_n = \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Mátrixműveletek

5. Definíció (Mátrixok összeadása és skalárral szorzása)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ és $B = (b_{ij})_{m\times n}$ két T számtest feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \text{ és } cA = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

6. *Megjegyzés.* Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni.

7. Példa. $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -8 & 10 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \end{pmatrix}, \qquad (-2)\cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \\ -4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

8. Definíció (Mátrixok szorzása)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ és $B = (b_{ij})_{n\times k}$ két T számtest feletti mátrix. Ekkor

$$AB = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \right)_{m\times k}.$$

9. *Megjegyzés.* Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával.

10. *Megjegyzés.* AB általában nem egyezik meg BA-val, sőt még lehet, hogy a méretük miatt nincs is értelmezve.

11. Példa. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Az AB mátrix (2×2)-es méretű lesz. A számolást végezzük úgy hogy az A megfelelő sorvektorait szorozzuk össze skalárisan B megfelelő oszlopvektorával. A skaláris szorzás a következőt jelenti:

$$\langle (a, b, c, d), (e, f, g, h) \rangle = ae + bf + cg + dh.$$

Tehát AB megkapható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (2,-3,5), (6,2,-3) \rangle & \langle (2,-3,5), (-1,-2,0) \rangle \\ \langle (1,0,8), (6,2,-3) \rangle & \langle (1,0,8), (-1,-2,0) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12-6-15 & -2+6+0 \\ 6+0-24 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12. Példa. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (5,4,-2), (-1,0,-5) \rangle & \langle (5,4,-2), (-2,8,7) \rangle & \langle (5,4,-2), (3,3,9) \rangle \\ \langle (-9,4,6), (-1,0,-5) \rangle & \langle (-9,4,6), (-2,8,7) \rangle & \langle (-9,4,6), (3,3,9) \rangle \\ \langle (3,1,-2), (-1,0,-5) \rangle & \langle (3,1,-2), (-2,8,7) \rangle & \langle (3,1,-2), (3,3,9) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5+0+10 & -10+32-14 & 15+12-18 \\ 9+0-30 & 18+32+42 & -27+12+54 \\ -3+0+10 & -6+8-14 & 9+3-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -21 & 92 & 39 \\ 7 & -12 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. Definíció (Transzponálás)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ egy T számtest feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor A^T egy $(n \times m)$-es mátrix, melynek egy tetszőleges eleme a következőképpen számítható ki:

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival, vagy másképpen fogalmazva tükrözzük a mátrixot a „főátlóra". (Igazi főátlóról csak négyzetes mátrixok esetében szoktunk beszélni.)

14. Példa. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \; B^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \; C^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

15. Tétel. *Műveletek tulajdonságai.*
Legyenek A, B, C egy tetszőleges T test feletti mátrixok, és $c, d \in T$ skalárok. Ekkor

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $c(AB) = (cA)B$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c\left(A^T\right)$

3. Informatikai alkalmazások

- A különböző geometriai transzformációk tulajdonképpen lineáris leképezésnek tekinthetők, és kifejezhetők egy alkalmas mátrixszal történő szorzás segítségével. Például tükrözzük az $(a;\, b)$ pontot az y tengelyre. Ekkor a kapott vektor $(-a,\, b)$. Ha jól megnézzük, könnyen megtaláljuk az y tengelyre való tükrözés mátrixát:

  $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mert } (-a,\, b) = (a,\, b) \cdot A.$$

  Ilyen mátrixok megadhatók tükrözésekre, forgatásokra, vetítésekre, akár több dimenzióban is. LÁSD Diszkrét matematika III. és Számítógépes grafika tantárgyakból.

- A gráfok egyértelműen kódolhatók szomszédsági és pont-él illeszkedési mátrixukkal. Mivel a mátrix szinte minden programnyelvben jól kezelhető egy 2-dimenziós tömbként, így ennek a kódolásnak is vannak előnyei. A gráfok az informatika több területén is előkerülnek, akár programozási algoritmus, akár hardverszinten, például beszélhetünk erőforrásgráfról, vagy a számítógép-hálózat is felfogható egy (irányított) gráfként.
- Lineáris egyenletrendszer eseten elég az egyenletrendszer bővített mátrixával dolgozni. Sokszor kell megoldani lineáris egyenletrendszer, és érdekes kérdések merülnek fel a numerikus precizitás és a számolás időigénye kapcsán, LÁSD: Közelítő és szimbolikus számítások.
- Kódoláselméletben bizonyos kódok esetében a kódolás és a dekódolás is egy-egy mátrixszorzással kivitelezhető. Ide kapcsolódik a generátormátrix és a paritás-ellenőrző mátrix fogalma is, LÁSD Diszkrét matematika III.