Leképezések

Leképezések tulajdonságai. Számosságok.

1. Leképezések tulajdonságai

A továbbiakban legyen A és B két halmaz. Idézzünk fel néhány definíciót.

1. Definíció. **Reláció**knak nevezzük az $A \times A$ részhalmazait, azaz σ reláció, ha $\sigma \subseteq A \times A \left(= A^2\right)$. Egy A-ból B-be menő **megfeleltetés** az $A \times B$ részhalmaza, azaz σ egy $A \to B$ megfeleltetés, ha $\sigma \subseteq A \times B$.

Hasonló lesz a leképez fogalma is.

2. Definíció. Az $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést akkor nevezzük **leképezés**nek, ha BÁRMELY $a \in A$-hoz LÉTEZIK **pontosan egy** olyan $b \in B$, amelyre $(a, b) \in f$.

3. *Megjegyzés.* A továbbiakban az $(a, b) \in f$ jelölés helyett az $af = b$ jelölést alkalmazzuk, amire szóban úgy hivatkozunk, hogy az a elem képen az f leképezés szerint a b elem.

A továbbiakban az $f : A \to B$ leképezés legyen rögzített. Definiáljuk a leképezések tulajdonságait.

4. Definíció. f **injektív**, ha BÁRMELY $a_1, a_2 \in A$-ra teljesül, hogy ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$.
Más szóval, különböző elemek képe különböző.

5. Definíció. f **szürjektív**, ha BÁRMELY $b \in B$-hez LÉTEZIK olyan $a \in A$, amelyre $af = b$.
Más szóval, minden B-beli elemnek van őse A-ban.

6. Definíció. f **bijektív**, ha injektív ÉS szürjektív.

7. Példa. Például, legyen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto |n - 3| + 1$ egy leképezés. Vizsgáljuk meg a g leképezés fenti tulajdonságait!

Injektivitás: Tegyük fel, hogy $ng = mg$, azaz $|n - 3| + 1 = |m - 3| + 1$. Ez ekvivalens azzal, hogy $|n - 3| = |m - 3|$, vagyis $n - 3 = \pm(m - 3)$. Két eset van: $n - 3 = m - 3$, vagy $n - 3 = 3 - m$. Az első esetben azt kapjuk, hogy $n = m$, és ezt kell kapnunk, ahhoz hogy injektív legyen, de meg kell vizsgálni a másik esetet is. A második eset azzal ekvivalens, hogy $n + m = 6$, azaz $m = 6 - n$. Ez azt jelenti, hogy $ng = (6 - n)g$, természetesen csak akkor, ha $6 - n \in \mathbb{N}$. De van olyan (elég) kicsi $n \in \mathbb{N}$, amelyre még $6 - n \in \mathbb{N}$, például $n = 5$. Ekkor azt kaptuk, hogy $5g = 1g$, viszont $5 \neq 1$, tehát a g leképezés NEM injektív. A kapott ellenpélda ránézésre is megmondható, nem fontos végig levezetni.

8. *Megjegyzés.* Ha már egy ELLENPÉLDÁT találunk, akkor a tulajdonság meg van lőve.

9. *Megjegyzés.* Ábrázolás + vízszintes vonal teszt.

Szürjektivitás: Rögzítünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{N}$ számot, és keresünk hozzá egy megfelelő $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $g(n) = y$. Keressük az n számot a következő egyenlet megoldásaként: $|n - 3| + 1 = y$. Ez azzal ekvivalens, hogy $|n - 3| = y - 1$. Nekünk nem az összes olyan szám kell, aminek a képe y, elég csak egyet találnunk, ezért elhagyhatjuk az abszolút érték jelet. Ekkor azt kapjuk, hogy $n - 3 = y - 1$, azaz $n = y + 2$. Mit kaptunk? Azt hogy BÁRMELY $y \in \mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $(y + 2)g = y$. Tehát minden y-hoz található ős, ezért a leképezés szürjektív.

10. *Megjegyzés.* Ábrázolás + vízszintes vonal teszt.

Bijektivitás: A fenti g leképezés nyilván NEM bijektív, mivel nem injektív.

2. Számosságok

Végtelen halmazok esetén az elemszám helyett a számosság fogalmat használjuk. Minden halmaznak van számossága, ami véges halmaz esetén természetesen megegyezik a jól ismert elemszám fogalommal.

11. Példa. Az $A = \{0, a\}$ halmaz véges, elemszáma kettő, azaz $|A| = 2$.

12. Tétel. *Ha A egy véges halmaz akkor $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. (Ez végtelen halmazokra is igaz, azonban ennek megértéséhez már magasabb fokú halmazelméleti ismeretekre lenne szükség, ami nem tartozik a tantárgy keretei közé.)*

13. Példa. Mivel $|\emptyset| = 0$, így $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$ és $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))| = 8$.

14. Definíció. Az $\mathbb{N}$ halmaz számosságát **megszámlálhatóan végtelen**nek nevezzük, és $\aleph_0$-lal jelöljük, azaz $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Véges halmazok esetén természetes módon adódik, hogy két halmaz elemszáma mikor egyezik meg. Végtelen halmazok esetén, már nem tudjuk ilyen egyszerűn megállapítani, hogy mikor egyenlő két halmaz számossága. Mint látható, már a számosság egyenlőségének fogalma sem olyan egyszerű, mint véges esetben.

15. Definíció. Az A és B halmazok **számossága egyenlő**, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.

16. Példa. A $B = \{\text{pozitív páros számok}\}$ halmaz végtelen sok elemet tartalmaz, elemszáma helyett számossága van, mégpedig $|B| = \aleph_0$. A megfelelő bijekció ami ezt bizonyítja, az $\alpha : \mathbb{N} \to B$, $n \mapsto 2n$ leképezés.

17. *Észrevétel.* Az előző példában az érdekesség az, hogy ugyanannyi egész szám van, mint ahány páros egész szám van, pedig az egész számoknak csak a fele páros. Ez nem ellentmondás, a fenti definíciók alapján jó a példa.

18. Definíció. Az A halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő**, mint a B halmaz számossága, azaz $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \to B$ injektív leképezés.

19. Tétel. *Tetszőleges A halmaz esetén $|A| \neq \mathcal{P}(A)$, sőt $|A| < \mathcal{P}(A)$.*

20. Tétel. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

21. Definíció. Az $\mathbb{R}$ halmaz számosságát **kontinuum számosság**nak nevezzük, és c-vel jelöljük, azaz $|\mathbb{R}| = c$.

22. Példa. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{T}| = c$.

23. Tétel. *Az $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.*

24. Tétel.

1. *(Dichotómia) Tetszőleges A és B halmazok esetén$|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$.*
2. *(Antiszimmetria) Tetszőleges A és B halmazok esetén ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.*
3. *Legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is megszámlálhatóan végtelen.*
4. ***(Számosságaritmetika alaptétele)** Ha az A és B halmazok közül valamelyik végtelen számosságú, akkor*
$$|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|).$$
5. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
6. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

3. Alkalmazások

1. Egy programnyelvben a beépített véletlenszám-generátor a $[0; 1]$ intervallumból ad vissza értéket (egyenletes eloszlással). Nekünk a dobókocka szimulálására van szükség. A feladat egy leképezéssel könnyen megoldható, ahol a $[0; 1]$ intervallum számait kell leképezni az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számhalmazra.
2. Digitalizálás: egy analóg jel digitalizálásakor végtelen sok különböző állapotról kell leképeznünk véges állapothalmazra, mivel a számítógép diszkrét működésű. Például a szemmel érzékelhető színeket (természetesen annak csak egy sokkal „kisebb” méretű részhalmazát) RGB-kóddal jeleníthetjük meg a számítógépen. (A $\left(\pi, \sqrt{2}, e\right)$ színt meg tudjuk jeleníteni? Miért igen, vagy nem? Milyen tulajdonságú akkor az „RGB-leképezés”?)

3. Kódolás (titkosítás): olyan leképezés, mellyel egy üzenet képe csak a leképezés inverzével együtt olvasható, azaz a kódoló és dekódoló leképezés szorzata az identitás. (Valójában nem teljesen inverzre van szükség.)
4. Programozás: szintaktikai és szemantikai szabályok szerint leképezzük a végrehajtandó feladatot egy adott programnyelvre. (A compiler természetes még ezt is tovább képezi alacsonyabb szintű programokra.) Itt a leképezés inkább csak köznyelvileg értendő, ugyanis a leképezést a programozó végzi, miközben a programot írja. Ez nem matematikai leképezés, de valamilyen szinten ugyanarról van szó.