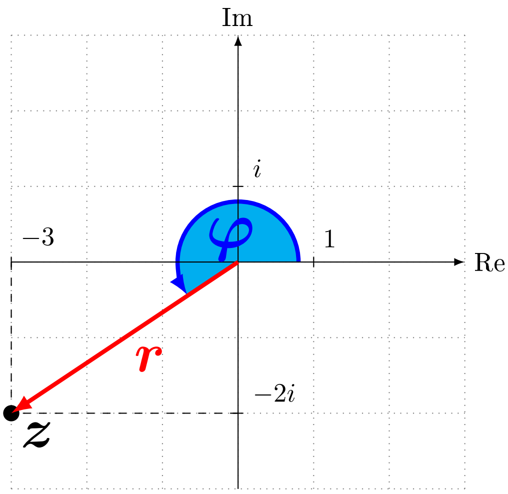
Komplex számok

Komplex számok és alakjaik,
számolás komplex számokkal.

1. Komplex számok

1. Definíció. A **komplex számok** halmazát $\mathbb{C}$-vel jelöljük, és $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Tehát definíció szerint egy komplex szám nem más, mint egy valós számokból álló rendezett számpár.



2. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$ egy komplex szám.
Ekkor a z **kanonikus alak**ja

$$z = a + b \cdot i.$$

A z komplex szám **trigonometrikus alak**ja

$$z = r\left(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\right),$$

ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\varphi = \arg(z)$ az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül úgy, hogy átmenjen a z-nek megfelelő ponton. Az r-et a z komplex szám abszolútértékének, az $\arg(z)$ szöget a z komplex szám argumentumának nevezzük.

3. Definíció. A $z = (a, b)$ komplex szám $z = a + bi$ kanonikus alakjában szereplő a valós számot z **valós rész**ének, b valós számot z **képzetes rész**ének nevezzük. Más jelöléssel $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$. Az i a **képzetes egység**. Az i olyan komplex szám, amelynek a négyzete -1, azaz $i^2 = -1$.

4. Definíció. Legyenek z_1 és z_2 a következő kanonikus alakú komplex számok:

$$z_1 = a + bi, \ z_2 = c + di.$$

Ekkor definiálhatjuk a következő **műveletek**et:

- *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$
- *Ellentett:* $-z_1 = -a - bi.$
- *Kivonás:* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i.$
- *Szorzás:* $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$
- *Konjugált:* $\overline{z_1} = a - bi.$
- *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$
- *Osztás:*
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

5. Példa. $z_1 = (1, -1)$, $z_2 = (-4, 5)$

- **Kanonikus alak:** $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -4 + 5i$.
- **Trigonometrikus alak:** $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$
- **Műveletek:**
  - *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (1 - 4) + (-1 + 5)i = -3 + 4i.$
  - *Ellentett:* $-z_2 = 4 - 5i.$
  - *Kivonás:* $z_2 - z_1 = (-4 - 1) + (5 - (-1))i = -5 + 6i.$
  - *Szorzás:* $z_1 z_2 = (1 - i)(-4 + 5i) = -4 + 5i + 4i + 5 = 1 + 9i.$
  - *Konjugált:* $\overline{z_1} = 1 + i.$

– *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
– *Osztás:*
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4+5i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-4-4i+5i-5}{1^2-i^2} = \frac{-9+i}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Mivel egy komplex szám egy rendezett számpár, azonnal adódik a következő állítás.

6. Tétel. *Ha $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ két komplex szám, akkor $z_1 = z_2$ pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.*

7. Tétel. *Legyenek z és w a következő trigonometrikus alakú komplex számok:*
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = s(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Ekkor

- $z \cdot w = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$;
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$;
- $\overline{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$;

- *tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ számra $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$;*
- *ha $z \neq 0$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, azaz minden nemnulla komplex számnak pontosan n darab n-edik gyöke van.*

8. Példa. Legyen $z = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ és $w = (1, -1)$ két komplex szám.

- $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $w = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;
- $zw = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$;
- $\frac{z}{w} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{19\pi}{12}\right)\right)$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;
- $\overline{w} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)$;
- $w^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(6 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(6 \cdot \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$;
- $\sqrt[3]{z} = x : x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}/3\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)$,
$x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)/3\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right)$,
$x_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right)/3\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right)/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right)$.

2. Alkalmazások

1. Komplex számok fizikai alkalmazásai: váltóáramú körök leírása, rezgések és hullámok leírása, komplex idő- és amplitúdófüggvény, kvantummechanikai számítások.
2. Vegyük a következő sorozatot: $z_0 = 0$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Azon c komplex számok, melyek esetén a sorozat korlátos a Mandelbrot-halmaz elemei, ami a talán legismertebb fraktálalakzat.
3. Hogy rajzoljunk egy szabályos n-szöget a képernyőre? Rögzítsünk egy pontot, és a megadott képlettel számoljuk ki a rögzített pont által reprezentált komplex szám n-edik gyökeit (illetve csak azok közelítő értékeit). Így megkapjuk az n-szög összes csúcsát.
4. A Wolfram Alpha ingyenes, internetes szoftverrel a komplex számokkal történő elemi számítások könnyen elvégezhető. A *http://www.wolframalpha.com/* honlapon `(10+4i)/((2-3i)*(-9-i))` formában lehet megadni komplex számokat és műveleteket. Szinte mindegyik komputeralgebrai szoftver képes a komplex számokat kezelni, például a Maple és a MatLab is.