ÍTÉLETKALKULUS

Logikai alapfogalmak, műveletek, formalizálás,
logikai ekvivalencia, teljes diszjunktív normálforma, tautológia.

1. Bevezető

A matematikai logikában az állításoknak nem a tényleges jelentésével, hanem a szerkezetével, igazságértékével és gondolatmenetének helyességével foglalkozunk. Mi ezen kurzus keretei között csak kétértékű logikával foglalkozunk (igaz-hamis), de többértékű logika is értelmezhető. Például vegyük a következő kijelentéseket:

1. Ez a mondat hamis.
2. Minden 2-nél nagyobb páros egész szám felírható két prímszám összegeként.
3. Minden kétfejű ló piros.

Az első kijelentés ellentmondás, tehát nem lehet sem igaz, sem hamis, gondoljunk bele. A második egy híres sejtés, erről pedig egyszerűen nem tudjuk megmondani, hogy igaz-e, vagy hamis. A harmadik kijelentés pedig azért érdekes, mert a kétértékű logika szerint igaznak kellene lennie, mert a tagadása hamis, de ezt is úgy szoktuk elintézni, hogy logikai értéke eldönthetetlen. Többek között az informatikában alkalmazzák a szintén többértékű Fuzzy-logikát, amely nem csak a szokásos 0-1 értékeket veheti fel, hanem köztes értékeket is. Ezáltal az objektumok több csoportba sorolhatók, és a gépek jobban irányíthatók. Mi ilyenekkel nem foglalkozunk, helyette a matematikai logika legalapvetőbb részét nézzük át.

2. Ítéletkalkulus

1. Definíció (Ítélet)**.** Az **ítélet** olyan állítás, amelynek igazságértéke van (igaz vagy hamis). Jelölésük: $A, B, C, \ldots$

Nem ítéletek a következők: felkiáltások, felszólítások, kérdő mondatok, ...

Hasonlóan, mint a hétköznapi nyelvben is, az ítéletek bizonyos módon összekapcsolhatók, és így új összetett ítéleteket kaphatunk. Nézzük meg milyen kapcsolatban állhatnak egymással az ítéletek, illetve pontosabban milyen művelettel kapcsolhatók össze az ítéletek.

2. Definíció. Ha A és B két ítélet, akkor értelmezzük az alábbi műveleteket.

- **Negáció**: $\neg A$
  „NEM A" - Így fejezzük ki nyelvtanilag a logikai kapcsolatot szavakkal.
  C-ben, Java-ban: !
- **Konjunkció**: $A \wedge B$
  „A ÉS B": Nem minden „és" konjunkció, gondoljunk például a felsorolásra. Viszont „és" helyett állhat a „DE" szó, például „Szeretem a dimatot, DE utálom a Kalkulust."
  C-ben, Java-ban: &&
- **Diszjunkció**: $A \vee B$
  „A VAGY B": vagy A, vagy B, vagy mindkettő.
  C-ben, Java-ban: ||
  Fontos: NEM kizáró vagy! Ezen a kurzuson nincs kizáró vagy!
- **Implikáció**: $A \to B$
  „Ha A, akkor B." „Csak akkor A, ha B." „A-ból következik B." „B-nek elegendő feltétele A." „A-nak szükséges feltétele B."
- **Ekvivalencia**: $A \leftrightarrow B$
  „Akkor és csak akkor A, ha B." „Pontosan akkor A, ha B." „A-nak szükséges és elégséges feltétele B." „A ekvivalens B-vel."

2.1. Igazságtáblázatok

A	$\neg A$
i	h
h	i

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i

2.2. Formalizálás

3. Definíció (Prímítélet)**.** A **prímítélet** olyan ítélet, amely nem tartalmaz logikai kötőszavakat.

Formalizálásnál fontos, hogy csakis **kizárólag prímítéletek helyett vezessünk be ítéletváltozókat**. **FONTOS: A PRÍMÍTÉLET NEM TARTALMAZHAT TAGADÁST SEM!**

4. Definíció (Formula)**.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.

1. Az ítéletváltozók mindegyike formula.
2. Ha F és G formula, akkor a $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.
3. Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható a fenti 1. és 2. szabályok VÉGES sokszori alkalmazásával.

Ha jól megnézzük, akkor ez egy rekurzív definíció, ahol a rekurzió a prímítéleteknél áll meg. Informálisan a fenti definíció azt jelenti, hogy logikai műveletek segítségével, ítéletváltozókból és zárójelekből szintaktikailag helyes jelsorozatokat képzünk.

Precedenciasorrend: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$; ezt a precedenciasorrendet a gyakorlatban zárójelezéssel helyettesítjük.

5. Példa. „Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk." Formalizálás:
Prímítéletek: A - esik az eső; B - rossz kedvem van; C - elmegyek dimat gyakorlatra; D - zh-t írunk.
Formalizálva: $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$. Precedenciákat alkalmazva: $A \wedge \neg B \to (C \leftrightarrow D)$.

6. Definíció (Részformula)**.** Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulá**ja F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során.

7. Példa. Az előző példa összes részformulái a következők: A, B, $(\neg B)$, $(A \wedge (\neg B))$, C, D, $(C \leftrightarrow D)$, $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$.

2.3. Kiértékelés, logikai ekvivalencia

8. Definíció (Kiértékelés)**.** A **kiértékelés** az a művelet, amikor a változók helyére igaz vagy hamis értéket helyettesítünk.

9. Példa. Legyen adott a következő formula: $A \to ((\neg B) \vee C)$. Számoljuk ki a formula azon kiértékelését, melyben A és C igaz, B pedig hamis.

A	B	C	$(\neg B)$	$((\neg B) \vee C)$	$A \to ((\neg B) \vee C)$
i	h	i	$\neg h = i$	$(i \vee i) = i$	$i \to i = i$

10. Definíció (Logikai ekvivalencia)**.** Az ítéletkalkulus F és G formulája **logikailag ekvivalens**, ha értékük BÁRMELY kiértékelésnél megegyezik. Jelölésben: $F \equiv G$.

Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy mindkét formulára felírjuk az igazságtáblázatot, és összenézzük a két formula összes kiértékelését, és ha mindegyik megegyezik, akkor ekvivalensek.

11. Példa. Ekvivalens-e a következő két formula: $F = \neg(A \to B)$, $G = A \wedge (\neg B)$.

A	B	$(A \to B)$	$F = \neg(A \to B)$	$(\neg B)$	$G = A \wedge (\neg B)$
i	i	i	h	h	$i \wedge h = h$
i	h	h	i	i	$i \wedge i = i$
h	i	i	h	h	$h \wedge h = h$
h	h	i	h	i	$h \wedge i = h$

12. Példa. Az utolsó oldalon összegyűjtöttük a legfontosabb ekvivalenciákat, amelyek közül mind bizonyítható az előző példában mutatott módon.

2.4. Diszjunktív normálforma

13. Definíció (Diszjunktív normálforma)**.** Egy formula **diszjunktív normálforma**, ha $P_1 \vee \ldots \vee P_k$ alakú, ahol minden P_i ítéletváltozók és negáltjaik konjunkciója oly módon, hogy mindegyik változó minden P_i-ben legfeljebb 1-szer szerepel.

14. Definíció (Teljes diszjunktív normálforma)**.** Ha egy n-változós diszjunktív normálforma minden P_i-jében mind az n darab változó szerepel, akkor **teljes diszjunktív normálformá**ról beszélünk.

A definícióknál sokkal érthetőbb ezeket egy példán bemutatni.

15. Példa. A következő formulák diszjunktív normálformák:

- $(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ - teljes is ($k = 2$, $n = 3$).
- $A_1 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ - ez nyilván nem teljes ($k = 2$, $n = 2$).
- $A_1 \vee A_2$ - ez sem teljes ($k = 2$, $n = 2$).
- $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3$ - teljes is ($k = 1$, $n = 3$).

16. Tétel. *Tetszőleges F formulához létezik olyan teljes diszjunktív normálforma, amely F-fel logikailag ekvivalens.*

Ez egy nagyon fontos tétel, azonban semmit nem mond arról, hogyan keressük meg ezt a teljes diszjunktív normálformát. A módszer a következő:

1. Felírjuk F igazságtáblázatát.
2. A definícióban szereplő P_i-k azon sorokat reprezentálják, ahol F logikai értéke igaz.
3. Minden sorhoz a megfelelő P_i-t úgy kapjuk, hogy azon változókat negáljuk, ahol hamis érték szerepel, és vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.

17. Példa. Írjuk fel az $(A \vee B) \to (\neg A)$ formula teljes diszjunktív normálformáját!

A	B	$(A \vee B)$	$(\neg A)$	$(A \vee B) \to (\neg A)$	
i	i	i	h	$i \to h = h$	
i	h	i	h	$i \to h = h$	
h	i	i	i	$i \to i = i$	$\Leftarrow$
h	h	h	i	$h \to i = i$	$\Leftarrow$

$(A \vee B) \to (\neg A) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

2.5. Tautológia

18. Definíció (Tautológia)**.** Egy formula **tautológia**, ha bármely kiértékelésre igaz.

A definíció szerint könnyen ellenőrizhető, hogy egy formula tautológia-e, csak fel kell írni az igazságtáblázatát, és megnézni, hogy a végén mindenhol igaz érték jön-e ki.

19. Példa. Nézzük meg, hogy az $(A \wedge (A \to B)) \to B$ formula tautológia-e?

A	B	$(A \to B)$	$(A \wedge (A \to B))$	$(A \wedge (A \to B)) \to B$
i	i	i	$i \wedge i = i$	$i \to i = i$
i	h	h	$i \wedge h = h$	$h \to h = i$
h	i	i	$h \wedge i = h$	$h \to i = i$
h	h	i	$h \wedge i = h$	$h \to h = i$

Minden kiértékelésre igaz a formula, tehát $(A \wedge (A \to B)) \to B$ tautológia.

Tautológiagyűjtemény

(I) $\to$, $\leftrightarrow$ kifejezése a többi művelettel:

(1) $$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A),$$

(2) $$A \to B \equiv (\neg A) \vee B.$$

(II) $\wedge$, $\vee$ alaptulajdonságai:

(3)	$A \wedge A \equiv A,$	$A \vee A \equiv A,$	(idempotencia)
(4)	$A \wedge B \equiv B \wedge A,$	$A \vee B \equiv B \vee A,$	(kommutativitás)
(5)	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C),$	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C),$	(asszociativitás)
(6)	$(A \vee B) \wedge A \equiv A,$	$(A \wedge B) \vee A \equiv A,$	(abszorptivitás)
(7)	$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C),$	$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C).$	(disztributivitás)

(III) $\wedge$, $\vee$, $\neg$ közötti összefüggések:

(8) $$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), \quad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B),$$ (De Morgan szabályok)

(9) $$\neg(\neg A) \equiv A,$$

(10) $$A \wedge (\neg A) \equiv B \wedge (\neg B), \quad A \vee (\neg A) \equiv B \vee (\neg B),$$

(11) $$A \wedge \big(B \vee (\neg B)\big) \equiv A, \quad A \vee \big(B \vee (\neg B)\big) \equiv B \vee (\neg B),$$

(12) $$A \wedge \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv B \wedge (\neg B), \quad A \vee \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv A.$$

(IV) $\to$-t és $\leftrightarrow$-t tartalmazó logikai ekvivalenciák:

(13) $$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A,$$ (kommutativitás)

(14) $$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C),$$ (asszociativitás)

(15) $$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A),$$

(16) $$(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv (A \vee B) \to C,$$

(17) $$(A \to B) \wedge (A \to C) \equiv A \to (B \wedge C),$$

(18) $$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C,$$

(19) $$A \to \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv \neg A.$$

(V) Tautológiák:

(20) $$A \to A \ \big(\equiv A \vee (\neg A)\big),$$

(21) $$\big(A \wedge (A \to B)\big) \to B,$$

(22) $$\big((\neg B) \wedge (A \to B)\big) \to (\neg A),$$

(23) $$\big((\neg A) \wedge (A \vee B)\big) \to B,$$

(24) $$A \to \big(B \to (A \wedge B)\big),$$

(25) $$(A \wedge B) \to A,$$

(26) $$A \to (A \vee B),$$

(27) $$\big((A \to B) \wedge (B \to C)\big) \to (A \to C),$$

(28) $$(A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big),$$

(29) $$(A \to B) \to \big((A \wedge C) \to (B \wedge C)\big),$$

(30) $$(A \to B) \to \big((A \vee C) \to (B \vee C)\big),$$

(31) $$\big((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)\big) \to (A \leftrightarrow C),$$

továbbá

(32) $$(A \leftrightarrow B) \to \big((A * C) \leftrightarrow (B * C)\big),$$

(33) $$(A \leftrightarrow B) \to \big((C * A) \leftrightarrow (C * B)\big),$$

ahol $*$ a $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ logikai műveletek bármelyike lehet.

Az (V) tautológiák, valamint az egyes $F \equiv G$ alapvető logikai ekvivalenciákból származtatott $F \leftrightarrow G$, $F \to G$ és $G \to F$ alakú tautológiák összességét nevezzük tautológiagyűjteménynek.