Mátrixok inverze és sajátértéke

1. Inverz

1. Definíció. Egy A négyzetes mátrix inverzének nevezzük azt az A^{-1}-gyel jelölt mátrixot, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, ahol E a megfelelő méretű egységmátrix. (A definíció alapján egyértelmű, hogy az inverz mérete megegyezik az eredeti mátrix méretével.)

A definíció azonban semmit nem mond arról, hogy milyen mátrixoknak van inverze, és ha van, akkor hogyan számolhatjuk ki. A következőkben két kiszámítási módot fogunk ismertetni.

1.1. Tétel szerinti kiszámítás

2. Definíció. Egy $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrix a_{ij} eleméhez tartozó **adjungált aldeterminánst** A_{ij}-vel jelöljük és az

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

képlettel számítjuk ki, ahol D_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó **aldetermináns**, vagyis annak a mátrixnak a determinánsa, melyet úgy kapunk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és j-edik oszlopát.

3. Tétel. *Tetszőleges $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha* $\det(A) \neq 0$. *Ha van inverze, akkor pontosan egy van, és erre érvényes az alábbi képlet:*

$$A^{-1} = \frac{(A_{ji})_{n\times n}}{\det(A)}.$$

4. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\det(A) = 3 + 4 - 2 - 4 = 1$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{(1+1)} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2, & A_{12} &= (-1)^{(1+2)} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -(4-3) = -1, \\
A_{13} &= (-1)^{(1+3)} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1, & A_{21} &= (-1)^{(2+1)} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -(4-4) = 0, \\
A_{22} &= (-1)^{(2+2)} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 0 - 2 = -2, & A_{23} &= (-1)^{(2+3)} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -(0-1) = 1, \\
A_{31} &= (-1)^{(3+1)} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1, & A_{32} &= (-1)^{(3+2)} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -(0-2) = 2,
\end{aligned}$$

$$A_{33} = (-1)^{(3+3)} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2. Gauss-Jordan-elemináció

5. Definíció. Egy adott M mátrix esetén a **sorvektorrendszer elemi átalakításai**n az alábbiakat értjük:

- két sor cseréje,
- egy sor megszorzása egy nemnulla konstanssal,
- egyik sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

6. Tétel. *Ha A egy $n \times n$-es négyzetes mátrix, E pedig az $n \times n$-es egységmátrix, akkor tekintsük a $B = (A \mid E)$ mátrixot. Az A mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a sorvektorrendszer elemi átalakításainak sorozatával a B mátrix $(E \mid C)$ alakra hozható. Ekkor $A^{-1} = C$.*

7. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

(1) 1. és 2. sor cseréje.
(2) 3. sorból kivonom az 1.-t.

$$\overset{(3)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(4)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(5)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

(3) 1. sorból kivonom a 2.-at.
(4) 3. sorból kivonom az 2.-at.
(5) 3. sor megszorzása (-1)-gyel.

$$\overset{(6)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{(7)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(6) 1. sorból kivonom a 3.-at.
(7) 2. sorhoz hozzáadom a 3. sor (-2)-szeresét.

8. *Megjegyzés.* Hasonlóan a determináns kiszámításához nagyobb méretű mátrixok esetén itt is a Gauss-Jordan-elimináció sokkal gyorsabb, mint a tétel szerinti aldeterminánsos módszer.

2. Sajátérték

9. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. Ha $xA = \lambda x$ valamely $\lambda \in T$ számra és valamely nemnulla $x \in T^{1\times n}$ sorvektorra, akkor λ-t az A mátrix **sajátérték**ének, az x vektort pedig az A mátrix λ-hoz tartozó **baloldali sajátvektor**nak nevezzük.

10. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. Ha $Ax = \lambda x$ valamely $\lambda \in T$ számra és valamely nemnulla $x \in T^{n\times 1}$ oszlopvektorra, akkor λ-t az A mátrix **sajátérték**ének, az x vektort pedig az A mátrix λ-hoz tartozó **jobboldali sajátvektor**nak nevezzük.

11. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix, és λ egy sajátértéke A-nak. Ekkor a λ-hoz tartozó bal- és jobboldali sajátvektorok halmazát a nullvektorral kiegészítve **bal-** illetve **jobboldali sajátaltér**nek nevezzük.

12. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. A

$$\chi_A(x) = (-1)^n \cdot \det (A - x \cdot E_n)$$

polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinom**jának nevezzük.

13. Tétel. *Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. Ekkor az A mátrix sajátértékei pontosan a $\chi_A(x)$ karakterisztikus polinom gyökei.*

14. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\chi_A(x) = \det \left(\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 9-x & 4 \\ 3 & 5-x \end{pmatrix} = (9-x)(5-x) - 12 = x^2 - 14x + 33,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyökei: } x_1 = 3,\ x_2 = 11.$$

Így a mátrixnak két különböző valós sajátértéke van, $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 11$.

15. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ 4 & 5-x \end{pmatrix} = (1-x)(5-x)+4 = x^2-6x+9,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x = 3.$$

Így a mátrixnak egy darab valós sajátértéke van, $\lambda = 3$.

16. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (1-x)(3-x)+2 = x^2-4x+5,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2-i,\ x_2 = 2+i.$$

Így a mátrixnak nincs sajátértéke, ha a valós számok teste fölött dolgozunk, viszont a komplex számok teste esetén két gyök van, így az A mátrixnak két különböző komplex sajátértéke van: $\lambda_1 = 2-i$ és $\lambda_2 = 2+i$.

17. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det\begin{pmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-(1-x)^2 & 1+(1-x) \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 2-x \\ 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 1 \\ 2x-3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)(-1-1+2x-x^2-2x+3) = (x-2)(1-x^2)
\end{aligned}$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = -1$.