Determinánsok

Determinánsok kiszámítási módjai,
tulajdonságai és alkalmazásai.

1. Determináns

A determináns rendkívül fontos a lineáris algebrában, így egy determináns kiszámítása mindenkinek rutinfeladatnak kell, hogy legyen!

1.1. Sarrus-szabály

Egy 1 darab számból álló mátrix determinánsa maga a mátrixot alkotó szám. Egy (2×2)-es determináns kiszámítására maga a Sarrus-szabály a definíció:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= (\text{főátló elemeinek szorzata}) - (\text{mellékátló elemeinek szorzata}) \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

A (3×3)-as mátrix determinánsa hasonlóan számítható, egy kis kis eltéréssel. Itt nem csak a főátlóval, és a mellékátlóval kell számolni, hanem a velük párhuzamos „átlókkal" is. Segítségképpen a determináns után odaírhatjuk az első két oszlopát, hogy jobban lássuk a párhuzamosságot:

$$\begin{array}{|ccccc|cccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array}, \quad \begin{array}{|ccccc|cccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array}.$$

A determináns a következőképp áll össze. A főátlóban és a vele párhuzamos átlókban lévő elemek szorzatát adjuk össze, és ebből vonjuk ki a mellékátlóban, és a vele párhuzamos átlóban lévő elemek szorzatát. Tehát a következőt kell csinálni:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Nézzük meg ezt egy konkrét példán keresztül:

Példa.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= (3 \cdot (-5) \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot (-8)) + ((-4) \cdot (-2) \cdot 2) \\ &\quad - ((-4) \cdot (-5) \cdot (-8)) - (2 \cdot (-2) \cdot 1) - (3 \cdot 1 \cdot 2) \\ &= -15 - 16 + 16 + 160 + 4 - 6 = 143 \end{aligned}$$

1. *Megjegyzés.* Maga a számolási algoritmus nem bonyolult, de ennél a módszernél viszonylag nagy az elszámolás veszélye.

2. *Megjegyzés.* Ez a módszer csak (2×2)-es és (3×3)-as determinánsok kiszámolására használható, nagyobb méretre nem működik.

1.2. Sor/oszlop szerinti kifejtés (Kifejtési tétel)

Emlékezzünk arra, hogy sor/oszlop szerinti kifejtésnél gondolnunk kell a mátrixhoz tartozó „sakktáblára”, ami előjeleket tartalmaz felváltva, a bal felső sarok mindig „+”, és ettől váltakozik az előjel jobbra és lefelé:

+	−	+	…
−	+	−	…
+	−	+	…
⋮	⋮	⋮	⋱

Kiválasztjuk a determináns tetszőleges sorát vagy oszlopát, ami szerint a kifejtést el akarjuk végezni. Legyen ez először például az **első oszlop**. A determináns értéke a következőképpen adódik: a kiválasztott sor/oszlop elemeit megszorozzuk a sakktáblában neki megfelelő előjellel, majd megszorozzuk annak a maradék determinánsnak az értékével, amit úgy kapunk, hogy az eredeti determinánsból töröljük az elem sorát és oszlopát. A példán rögtön látszik, hogy mit kell csinálni:

Példa.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-8) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

A módszer lényege, hogy egy $(n \times n)$ méretű determinánst vissza tudunk vezetni $(n-1) \times (n-1)$-es determinánsokra. Folytassuk az (1) egyenlőséget, mivel a (2×2)-es determinánsok értéke már könnyen számolható:

$$\begin{aligned} (1) &= 3 \cdot ((-5) \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 8 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-5)) \\ &= 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 10 - 8 \cdot (-18) = -21 + 20 + 144 = 143. \end{aligned}$$

Gyakorlásképpen végezzük el a determináns kifejtését a **második sora** szerint is:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 5 \cdot (3 \cdot 1 - (-4) \cdot (-8)) - 1 \cdot (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-8)) \\ &= 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-29) - 1 \cdot 22 = 20 + 145 - 22 = 143. \end{aligned}$$

3. *Megjegyzés.* Ez a módszer tetszőleges méretű determinánsokra is működik, szemben a Sarrus-szabállyal, ami csak (2×2)-es és (3×3)-as determinánsokra alkalmazható.

4. *Megjegyzés.* Ha van a mátrix elemei között nulla, akkor érdemes lehet olyan sort, vagy oszlopot választani a kifejtéshez, amiben minél több nulla van. Ugyanis a kifejtésnél a nullához tartozó kisebb determináns 0-val szorzódna, így fel sem fontos tüntetni.

5. *Megjegyzés.* Dolgozatokban érdemes ezt alkalmazni, mert elszámolási hiba esetén még esetleg lehet részpontot adni, míg a Sarrus-szabálynál ez nehezebben oldható meg.

1.3. Elemi átalakítások (Gauss-elimináció)

6. *Megjegyzés.* Ez a módszer talán a leggyorsabb, viszont koránt sem olyan algoritmikus, mint az előző kettő. Csak azoknak ajánlom megtanulni, akik biztosak abban, hogy ez a módszer nem fogja összezavarni az eddig megtanultakat.

7. Tétel. *Determinánsokra vonatkozó alapvető tulajdonságok.*

1. *A determináns előjelet vált, ha két sorát megcseréljük.*
2. *Ha a determináns valamelyik sora nulla, akkor a determináns értéke nulla.*
3. *A determináns értéke nulla, van van két azonos sora.*
4. *Ha a determináns egy sorában minden elemet ugyanazzal a konstanssal megszorzunk, vagy elosztunk, akkor a determináns értéke is ezzel a konstanssal szorzódik, vagy osztódik.*
5. *A determináns nulla, ha az egyik sora egy másik sor valamely konstans-szorosa.*
6. ***A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor konstans-szorosát.***
7. *Dualitási elv: az 1. – 6. állításokban a „sor” szó kicserélhető az „oszlop” szóra.*

Elsősorban a kiemelt művelettel gyorsan ki tudjuk számítani a determinánst, mert meg tudjuk növelni a determinánsban szereplő nullák számát. A felsorolás többi eleme is hasznos lehet, de az alkalmazásuk nem szükségszerű.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -29 & 10 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -29 & 10 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (-7) \cdot (-29) - 6 \cdot 10 = 143.$$

- (1) : A 2. sorhoz hozzáadtam a 3. sor (-1)-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (2) : Az 1. sorhoz hozzáadtam a 3. sor 4-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (3) : Kifejtettem a determináns a 3. oszlopa szerint. (A sok nulla miatt valójában csak egy kisebb determinánst kell kiszámolni.)
- (4) : Sarrus-szabállyal megkaptam a végső eredményt.

8. *Megjegyzés.* Még egyszer hangsúlyozom, hogy nem kell ezt a módszert alkalmazni, mert kis mátrixok esetében a Sarrus-szabály sokkal gyorsabb, a kifejtéses módszert pedig könnyebb ellenőrizni.

1.4. Érdekesség

Egy $n \times n$-es mátrix determinánsának kiszámítása a kifejtéses módszerrel $\mathcal{O}(n!)$ időigénnyel tehető meg. Ha elemi átalakításokat végzünk, akkor bizonyítható, hogy az időigény csak $\mathcal{O}(n^3)$. Röviden rávilágítanék arra, hogy mennyivel jelent ez nagyobb gyorsaságot. A tegyük fel, hogy egy 5 GHz-es processzorú számítógéppel számolunk, ami azt jelenti, hogy 5 milliárd műveletet tud elvégezni másodpercenként. A könnyítés kedvéért a továbbiakban csak az ordo utáni függvényekkel számolok.

Ha $n = 3$, akkor a mátrix determinánsának kiszámítása kifejtéses módszerrel $0,12 \cdot 10^{-8}$ másodpercig tart, míg Gauss-eliminációval $0,54 \cdot 10^{-8}$ másodpercig. Itt még a kifejtéses módszer a gyorsabb. Ha $n = 10$, akkor az első módszerrel a számítás $0,00072576$ másodpercig tart, Gauss-eliminációval $0,0000002$ másodpercig tart. Itt az első módszer már több mint 3000-szer lassabb, de gyakorlatilag ez még elhanyagolható, mert a végső idő itt is kicsi.

Nézzük az $n = 15$ esetet. Gauss-eliminációval az időigény $0,000000675$ másodperc, míg kifejtéses módszerrel $4,358914560$ perc. Ez már eléggé érzékelhető és zavaró különbség. Ha $n = 20$, akkor a Gauss-eliminációnak még mindig jóval másodperc alatti idő szükséges, $0,0000016$ másodperc, míg a kifejtéses módszernek $15,64366003$ évre lenne szüksége. Nem lenne túl hatékony ezt kivárni.

Végül ugorjunk egy „hatalmasat”, legyen $n = 50$. A Gauss-elimináció még mindig hatékony, időigénye $0,000025$ másodperc. A kifejtéses módszerrel már komoly problémába ütköznénk, ugyanis $0.1955638709 \cdot 10^{48}$ évre lenne szüksége. A Nap várható hátralévő élettartamát $5-10$ milliárd évre becsülik, tehát a Nap már nem élné meg az eredményt. Ha jól tudom, akkor ez a számolási időigény már a világegyetem várható életkoránál is nagyobb szám. Ha valaki kíváncsi rá, hogy a Gauss-elimináció mekkora n esetén megy 1 másodperc fölé, az könnyen kiszámolhatja egy egyszerű egyenletmegoldással. Összefoglalva:

Méret	Gauss-elimináció	Rekurzív kifejtés
3×3	$0,54 \cdot 10^{-8}$ mp	$0,12 \cdot 10^{-8}$ mp
10×10	$0,0000002$ mp	$0,00072576$ mp
15×15	$0,000000675$ mp	$4,358914560$ perc
20×20	$0,0000016$ mp	$15,64366003$ év
50×50	$0,000025$ mp	$0.1955638709 \cdot 10^{48}$ év

Más kérdés, hogy melyik módszer mennyire stabil numerikusan, ebbe most nem mennék bele, de ez is érdekes kérdés.

A vázolt probléma egyáltalán nem csak elméleti, mert bizonyos területeken valóban több százszor több százas méretű mátrixokkal kell számolni, és ráadásul ezek a mátrixok több tíz tizedesjegy pontosságú tizedes törteket tartalmaznak. Hasonló kérdésekkel találkozhattok a Közelítő és szimbolikus számítások kurzuson.

1.5. Alkalmazások

- Kalkulus: Jacobi-determináns
- Paralelogramma területének, paralelepipedon térfogatának kiszámítása.
- Egyenletrendszerek megoldása Cramer-szabállyal.
- Adott pontokon átmenő sík, egyenes, kör egyenlete is felírható determinánssal.
- Adott egy gráf. Van-e benne kör? Mennyi a feszítőfáinak száma? A kérdések a megfelelő mátrixok determinánsa alapján megoldható. (Informatikai párhuzam: van-e holtpont az erőforrások között? A választ lásd az Operációs rendszerek című kurzuson.)
- Adott egy páros gráf, van-e benne teljes párosítás? Egy speciális determinánssal ez is könnyen eldönthető.

1.6. Kiegészítés

- Wolfram Alpha / Wolfram Mathematica: `Det[{{3, 2, -4},{-2, -5, 1},{-8, 2, 1}}]`
- Maple: `LinearAlgebra[Determinant](Matrix([[3,2,-4],[-2,-5,1],[-8,2,1]]));`
- Matlab: `det([3 2 -4;-2 -5 1;-8 2 1])`
- Matek.hu