8. feladatsor – Vektorterek

8.1. Feladat. Határozzuk meg a következő $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok belső (skaláris) szorzatát, illetve vektoriális szorzatát.

a) $\underline{a} = (1,\ -2,\ 3),\ \underline{b} = (2,\ -4,\ 1)$;
b) $\underline{a} = (-1,\ 4,\ 2),\ \underline{b} = (1,\ -5,\ 3)$.

8.2. Feladat. Adjuk meg az $\underline{a} = (1,\ -2,\ 4)$, $\underline{b} = (4,\ -1,\ 0)$, $\underline{c} = (1,\ 3,\ -2)$ vektorok vegyes szorzatát.

8.3. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben.

a) $V = \mathbb{R}^2$; $\underline{a} = (-2,\ 4),\ \underline{b} = (1,\ -2)$;
b) $V = \mathbb{R}^3$; $\underline{a} = (1,\ -2,\ 4),\ \underline{b} = (2,\ -3,\ 1),\ \underline{c} = (-4,\ 5,\ 5)$;
c) $V = \mathbb{R}^4$; $\underline{a} = (1,\ -2,\ 3,\ 4),\ \underline{b} = (0,\ -3,\ 1,\ 2),\ \underline{c} = (2\ -4,\ 5,\ 9)$.

8.4. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a V vektortérben az alábbi vektorok lineársian függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

a) $V = \mathbb{R}^2$; $\underline{a} = (2,\ 3),\ \underline{b} = (x,\ -6)$;
b) $V = \mathbb{R}^4$; $\underline{a} = (1, -4, 3, 2),\ \underline{b} = (-1, 4, -2, -4),\ \underline{c} = (3 - 12, x, 10)$;
c) $V = \mathbb{R}^5$; $\underline{a} = (-1,\ -3,\ 2,\ 1,\ -1),\ \underline{b} = (-2,\ -8,\ 7,\ 3,\ -1),\ \underline{c} = (1,\ 9\ -11,\ -4,\ x)$.

8.5. Feladat. Döntsük el, hogy bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben a következő vektorok.

a) $(1,\ 2,\ -3),\ (4,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0)$;
b) $(1,\ 2,\ 4),\ (3,\ 5,\ 1)$;
c) $(1,\ 2,\ 4),\ (3,\ 5,\ 1),\ (4,\ 3,\ -2), (-1,\ 4,\ -3)$;
d) $(1,\ 2,\ -1),\ (3,\ 1,\ 4), (2,\ 3,\ -1)$.

8.6. Feladat. Adjuk meg az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra való áttérés mátrixát.

a) $\mathcal{E} = \{(1,\ 0), (0,\ 1)\},\ \mathcal{F} = \{(1,\ 1), (1,\ 2)\}$;
b) $\mathcal{E} = \{(1,\ 0,\ 0), (0,\ 1,\ 0), (0,\ 0,\ 1)\},\ \mathcal{F} = \{(1,\ 0,\ -1), (1,\ -1,\ 1), (2,\ 1,\ -5)\}$.

8.7. Feladat. Oldjuk meg Gauss elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array};$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array};$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array}.$$

8.8. Feladat. Határozzuk meg hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldástere, valalmint adjunk meg a megoldástér egy bázisát.

a) $$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_3 & = & 0 \end{array};$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \; .$$

8.9. Feladat. Döntsük el, hogy a következő halmazok alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^n$-ben (a megfelelő n-re). Ha igen, akkor adjuk meg az altér dimenzióját.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - 2y = z,\ y + z = x\}$;
b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y + 3z = 2\}$;
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$;
d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.