

7. feladatsor – Determinánsok, Mátrixok

7.1. Feladat. Határozzuk meg a következő determinánsokat.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

7.2. Feladat. Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

7.3. Feladat. Adjuk meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8.$$

7.4. Feladat. Számítsuk ki a következő mátrixokat: $A + B$, $3A$, B^T , BC , CA .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

7.5. Feladat. Legyen $A = (1 \ -1 \ 3)$ mátrix. Határozzuk meg az $A^T \cdot A$ szorzatmátrix determinánsát.

7.6. Feladat. Számítsuk ki az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ polinom helyettesítési értékét az A helyen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.7. Feladat. Adjuk meg a következő mátrixok inverzét.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

7.8. Feladat. Oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

7.9. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B $n \times n$ -es mátrixok esetén.

$$\text{a) } (A - B)(A + B) = A^2 - B^2;$$

$$\text{b) } (AB)^T = A^T B^T;$$

- c) $A^n A^m = A^{nm}$;
- d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7.10. Feladat. Határozzuk meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit.

- a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;
- b) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.