

## 6. feladatsor – Predikátumkalkulus

**6.1. Feladat.** Legyen  $Q$  egyváltozós predikátum,  $P$  kétváltozós predikátum,  $f$  kétváltozós függvényjel és  $a$  individuumkonstans. Adjuk meg a következő formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

$$(\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x)).$$

**6.2. Feladat.** Jelölje  $M(x)$  az „ $x$  négyzetszám”,  $P(x)$  az „ $x$  páros szám”,  $O(x, y)$  az „ $x$  osztója  $y$ -nak”,  $N(x)$  az „ $x$  negatív szám” predikátumokat, individuumtartomány az egész számok halmaza. Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

- a)  $(\forall x)(M(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge O(x, y)))$ ;
- b)  $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)((P(y) \wedge N(y)) \rightarrow (\neg O(y, x))))$ .

**6.3. Feladat.** Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$$\begin{array}{ll} H(x): \text{„}x \text{ hallgató”}, & V(x): \text{„}x \text{ felkészült a vizsgára”}, \\ B(x, y): \text{„}x \text{ az } y \text{ barátja”}, & C(x, y): \text{„}x \text{ csoporttársa } y\text{-nak”}, \\ T(x, y): \text{„}x \text{ házatársa } y\text{-nak”}, & F(x): \text{„}x \text{ férfi”}, \\ A(x): \text{„}x \text{ anya”}, & p: \text{„Péter”}, \\ a(x): \text{„}x \text{ anyja”}, & S(x): \text{„}x \text{ szeret főzni”}. \end{array}$$

- a) *Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.*
- b) *Minden hallgató felkészült a vizsgára.*
- c) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
- d) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.*
- e) *Vannak nőtlen férfiak.*
- f) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
- g) *Péter összes barátja hallgató.*
- h) *Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.*
- i) *Péter anyja szeret főzni.*

**6.4. Feladat.** Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

- a) *Minden informatikus éhes.*
- b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
- c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*
- d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
- e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
- f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
- g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*

**6.5. Feladat.** Döntsük el, hogy teljesülnek-e az alábbi formulák az  $(A; N, K, P)$  interpretációnál, ahol  $A = \mathbb{Z}$ ,  $N$  a négyzetszámok,  $K$  a köbszámok,  $P$  pedig a prímszámok halmaza.

- a)  $((\exists x)N(x) \wedge (\exists x)K(x)) \rightarrow (\exists x)(N(x) \wedge K(x));$
- b)  $(\exists x)(N(x) \vee P(x)) \rightarrow ((\exists x)N(x) \vee (\exists x)P(x)).$

**6.6. Feladat.** Döntsük el, hogy tautológiák-e a következő formulák.

- a)  $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \rightarrow (\forall x)A(x, x);$
- b)  $((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)) \rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x));$
- c)  $((\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)) \rightarrow (\exists x)(A(x) \vee B(x));$
- d)  $\neg(\exists x)(\forall y)((\neg A(x)) \vee (\neg B(y))) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)).$

**6.7. Feladat.** Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik fejezi ki fordított lengyel jelölésben, hogy az  $f$  kétváltozós művelet disztributív a  $g$  kétváltozós műveletre.

- (a)  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz);$
- (b)  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf);$
- (c)  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg).$