5. feladatsor – Ítéletkalkulus

5.1. Feladat. Adjuk meg az alábbi formula összes részformuláját:

$$(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow \big((\neg C) \to B\big).$$

5.2. Feladat. Döntsük el, hogy az

$$\begin{array}{llll} (a) & (A \leftrightarrow B) \vee \big((\neg B) \wedge C\big) & (b) & (A \leftrightarrow B) \vee \big((\neg B) \to C\big) \\ (c) & A \leftrightarrow \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big) & (d) & A \to \big(B \vee ((\neg B) \wedge C)\big) \end{array}$$

formulák közül — a prímítéletek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgép, vagy ha nem bírja el a repülőgép, de indul hajó Afrikába.

5.3. Feladat. A prímítéletelek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket:

a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok két pontot, és örülhetek.*

b) *Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha kis zh-t írunk.*

c) *Rossz kedvem van, és ha fáj a lábam, akkor a barátom nem jön velem táncolni.*

d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*

e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*

f) *Csak akkor megyek el a gyakorlatra, ha nem sikerült valamelyik feladatot megoldanom, vagy bele sem néztem az anyagba.*

g) *Megírom a vizsgadolgozatot, de csak akkor, ha van legalább 25 pontom, és tudom legalább az anyag felét.*

5.4. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a prímítéletek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A prímítéletek mindig pozitívak legyenek, azaz ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük $A, B, C, \ldots$ betűkkel.)

a) *Ha nem fáj a lábam és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el táncolni, ha a barátom is velem jön.*
$A : h,\ B : h,\ C : i,\ D : h.$

b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára.* $A : i,\ B : h,\ C : i,\ D : h,\ E : i.$

c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.* $A : i,\ B : i,\ C : i,\ D : h,\ E : h.$

5.5. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket. Mit mondhatunk az (1) ítéletek igazságértékéről, ha igaznak fogadjuk el a (2) ítéleteket.

a) (1) *Ha hideg van, vagy esik az eső, akkor megfázom.*
(2) *Esik az eső, de nem fázom meg.*

b) (1) *Ha a Vadász lelőtte a Farkast, akkor a Nagyi pontosan akkor evett epret, ha nem igaz az, hogy Piroska szereti a Farkast vagy a Farkas megeszi a Nagyit.*
(2) *Piroska szereti a Farkast, de ha Nagyi nem evett epret, akkor a Farkas megeszi a Nagyit. Ha a Farkas megeszi a Nagyit, akkor Piroska nem szereti a Farkast. A Vadász lelőtte a Farkast.*

c) (1) *Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor pontosan abban az esetben főz ebédet, ha nem takarít.*
Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor megeszi a mérgezett almát, ha viszont nem marad egyedül otthon, akkor nem főz ebédet és nem takarít.
(2) *Hófehérke pontosan akkor eszi meg a mérgezett almát, ha egyedül marad otthon. Ha Hófehérke megeszi a mérgezett almát, akkor nem főz ebédet és nem takarít. Hófehérke egyedül marad otthon.*

5.6. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat.

a) $(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$;
b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$;
c) $(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv (A \vee B) \to C$;
d) $(A \to B) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge C)) \equiv A \to (A \vee B)$;
e) $(A \to B) \to ((A \vee C) \to (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \to A$;
f) $((A \wedge B) \to A) \wedge (A \to (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A))$.

5.7. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy logikailag ekvivalensek-e.

a) (1) *Ha nem tanulsz vagy puskázol, akkor megbuksz.*
(2) *Ha nem tanulsz, akkor megbuksz, valamint ha puskázol, akkor is megbuksz.*

b) (1) *A Sárkányfűárus pontosan akkor tud árulni a piacon, ha sem Süsü, sem Királyfi nincs a városban.*
(2) *Süsü vagy Királyfi a városban van, vagy a Sárkányfűárus tud árulni a piacon, valamint ha Süsü vagy Királyfi nincs a városban, akkor a Sárkányfűárus nem tud árulni a piacon.*

c) (1) *Kriszta csak akkor nem bukik meg, ha Mézga Géza pontosan akkor lesz dühös, ha Aladár szivarozni kezd.*
(2) *Kriszta megbukik vagy Aladár nem kezd el szivarozni vagy Mézga Géza dühös lesz, valamint ha Kriszta nem bukik meg és Aladár sem kezd el szivarozni, akkor Mézga Géza nem lesz dühös.*

5.8. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma:

$F_1 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (\neg B))$, $\quad F_2 = (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C)$,
$F_3 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C))$, $\quad F_4 = (\neg A) \wedge B \wedge C$.

5.9. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját.

a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C)$;
b) $((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C$;
c) $(A \vee B) \to \big(\neg(C \to B)\big)$;
d) $(A \vee (\neg B)) \to (C \leftrightarrow B)$;

e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \vee (A \wedge B))$;
f) $(\neg(A \rightarrow B)) \wedge \big(((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B\big)$.

5.10. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia, és melyik nem.

a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$;
b) $A \rightarrow (A \wedge B)$;
c) $A \vee \big(B \rightarrow (\neg A)\big)$;
d) $\big(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow (\neg A))\big)$
e) $(A \vee B) \rightarrow ((A \vee (\neg B)) \rightarrow A)$;
f) $\big(B \vee (\neg A)\big) \rightarrow \big(B \vee (\neg A)\big)$;
g) $\big(((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C\big) \leftrightarrow \big((A \leftrightarrow C) \wedge A\big)$.