3. feladatsor – Leképezések

3.1. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

a) nem szürjektív;
b) szürjektív, de nem bijektív;
c) injektív, de nem bijektív;
d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat!

3.2. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. ($\mathbb{H}$: a sík nemelfajuló háromszögeinek halmaza; $\mathbb{E}$: az emberek halmaza.)

a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ x\alpha = x^2$;
b) $\beta = \{(x,y) : \text{ az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}^+$;
c) $\gamma = \{(x,y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$;
d) $\delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x\delta = \frac{4}{x}$;
e) $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto |n-3|+1$;
f) $\zeta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma;
g) $\eta\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x,y) \mapsto x+y$;
h) $\vartheta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x-1,1)$;
i) $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x-1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

3.3. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket!

a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3x+1$;
b) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = |x|, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 2x+3$.

3.4. Feladat. Ellenőrizzük, hogy bijektívek az alábbi leképezések, és adjuk meg az inverzüket!

a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x\alpha = 3x-1$;
b) $\beta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x\beta = (x+2)^2 - 4$.

3.5. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \to B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

a) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Z}$;
b) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q}$;
c) $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{R}$;
d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z},\ B = \mathbb{N}$;
e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ B = \mathbb{Z}$;
f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q},\ B = \mathbb{R}$;
g) $A = \mathbb{N}^3,\ B = \mathbb{Z}$;
h) $A = \mathbb{Q}^4,\ B = \mathbb{N}^2$;
i) $A = \mathbb{R}^2,\ B = \mathbb{Z}^8$.

3.6. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?

b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni.

c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?