Zarankiewicz feladata és a véges projektív síkok

Bogya Norbert

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

Középiskolás díjkiosztó

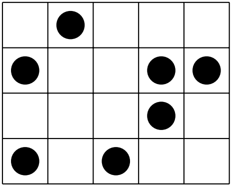
2014. november 22.

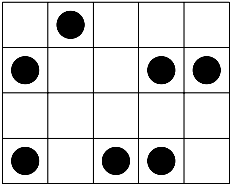
Zarankiewicz problémája

Adott egy $m \times n$-es táblázat, melynek celláit megjelöljük. Legfeljebb hány cellát tudunk megjelölni, hogy ne legyen négy olyan megjelölt cella, mely olyan négyzetet határoz meg, amelynek oldalai a táblázat oldalaival párhuzamosak?

Zarankiewicz problémája

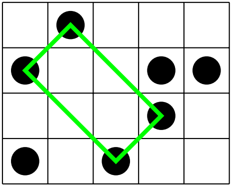
Adott egy $m \times n$-es táblázat, melynek celláit megjelöljük. Legfeljebb hány cellát tudunk megjelölni, hogy ne legyen négy olyan megjelölt cella, mely olyan négyzetet határoz meg, amelynek oldalai a táblázat oldalaival párhuzamosak?

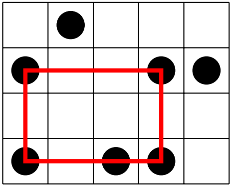




Zarankiewicz problémája

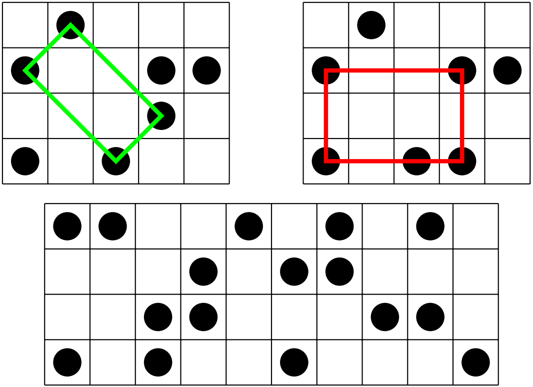
Adott egy $m \times n$-es táblázat, melynek celláit megjelöljük. Legfeljebb hány cellát tudunk megjelölni, hogy ne legyen négy olyan megjelölt cella, mely olyan négyzetet határoz meg, amelynek oldalai a táblázat oldalaival párhuzamosak?



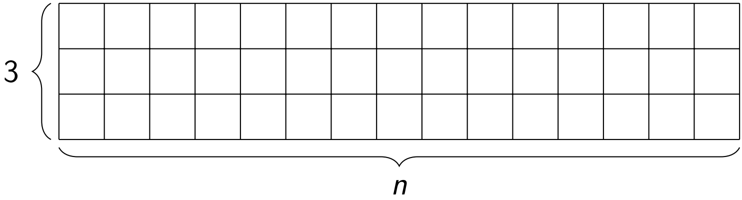


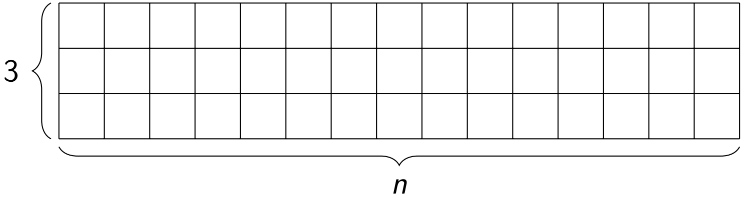
Zarankiewicz problémája

Adott egy $m \times n$-es táblázat, melynek celláit megjelöljük. Legfeljebb hány cellát tudunk megjelölni, hogy ne legyen négy olyan megjelölt cella, mely olyan négyzetet határoz meg, amelynek oldalai a táblázat oldalaival párhuzamosak?

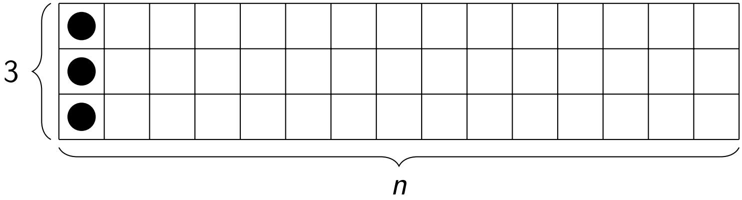


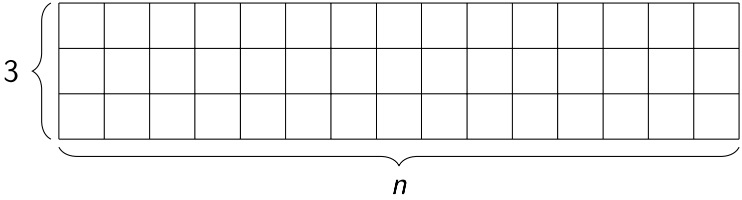
Speciális esetek
$m = 3$





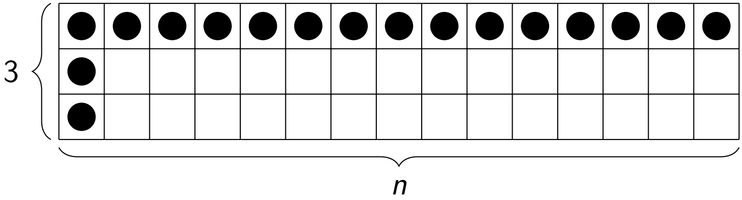
Speciális esetek
$m = 3$

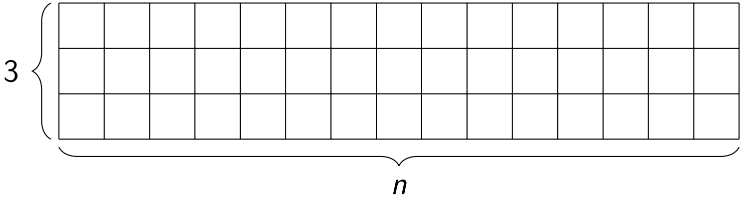




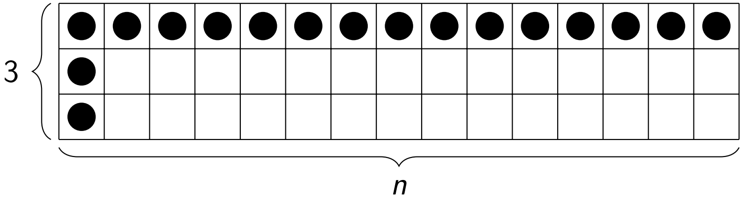
Speciális esetek

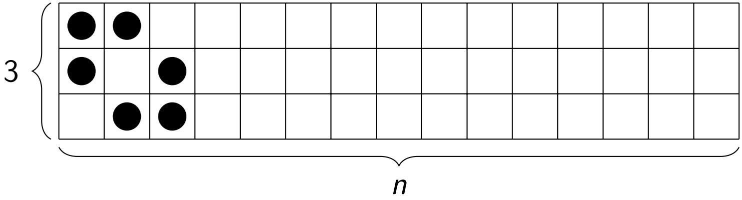
$m = 3$



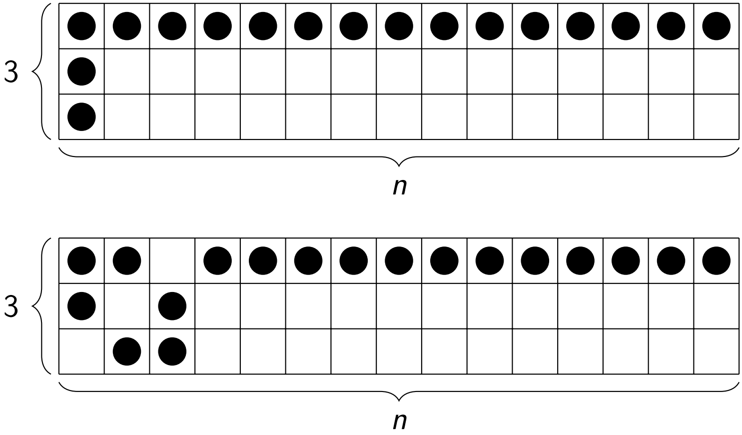


Speciális esetek
$m = 3$

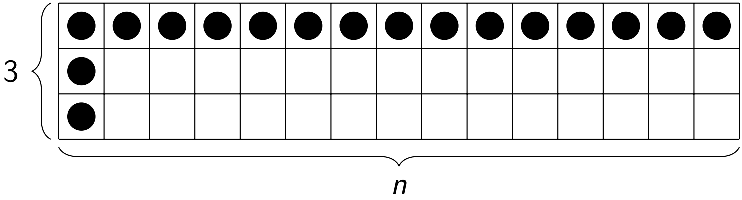


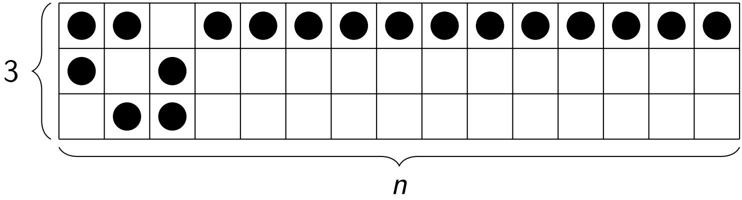


Speciális esetek
$m = 3$



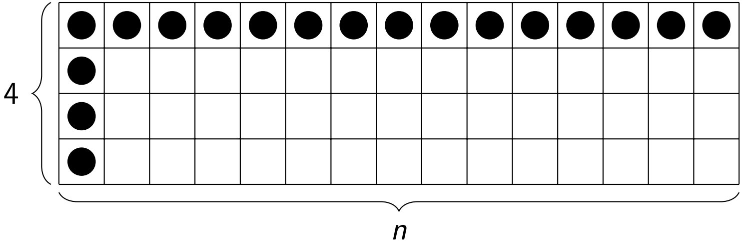
Speciális esetek
$m = 3$

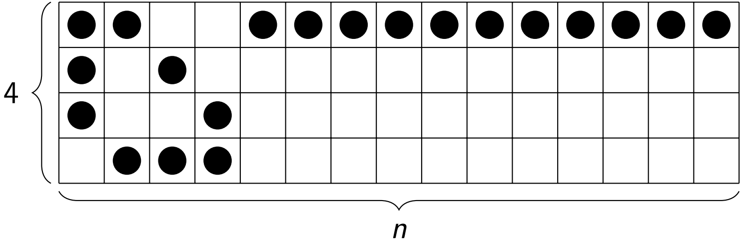




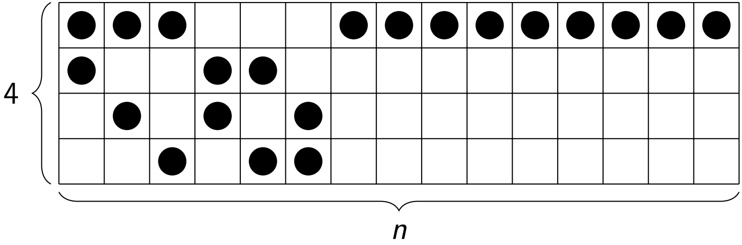
$$V(3, n) = n + 3$$

Speciális esetek
$m = 4$



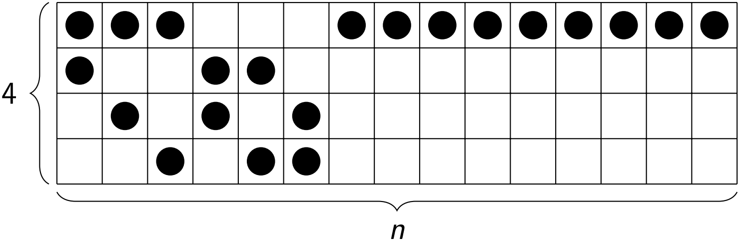


Speciális esetek
$m = 4$



Speciális esetek

$m = 4$



$$V(4, n) = \begin{cases} n + 6, & \text{ha } n \geq 6 \\ 10, & \text{ha } n = 5 \\ 9, & \text{ha } n = 4 \end{cases}$$

Úton a megoldáshoz

Állítás

Ha n elég nagy, akkor

$$V(m,n) = n + \frac{m(m-1)}{2}.$$

Úton a megoldáshoz

Állítás

Ha n elég nagy, akkor

$$V(m,n) = n + \frac{m(m-1)}{2}.$$

Kérdés

$$n < \frac{m(m-1)}{2}$$

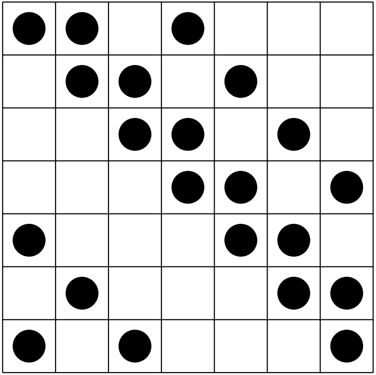
Tétel (Reiman István)

$$V(n,n) \leq \frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$$

Speciális esetek
$m = n$

Tétel (Reiman István)

$$V(n,n) \leq \frac{n}{2}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)$$



$n = 7$

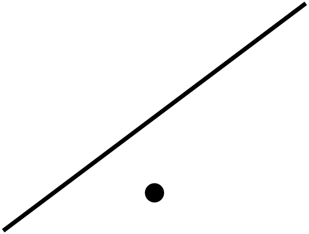
$V(7,7) = 21$

Sík

- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- Párhuzamossági axióma

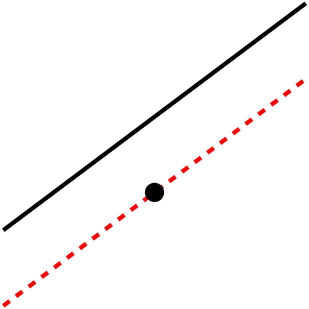
Sík

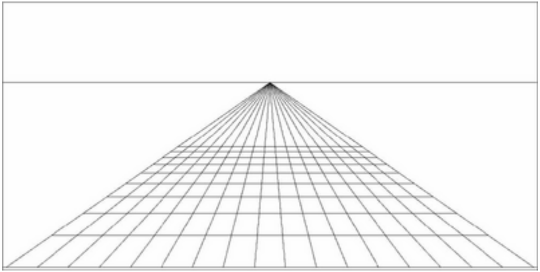
- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- **Párhuzamossági axióma**

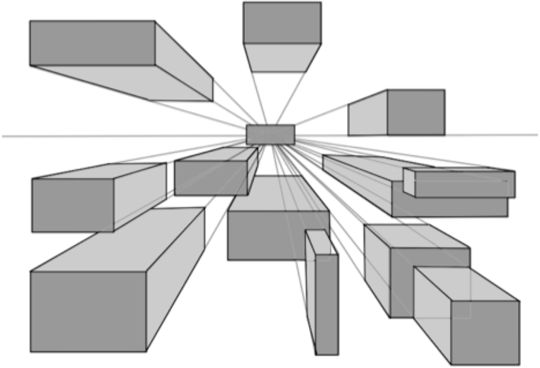


Sík

- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- Párhuzamossági axióma







Projektív sík

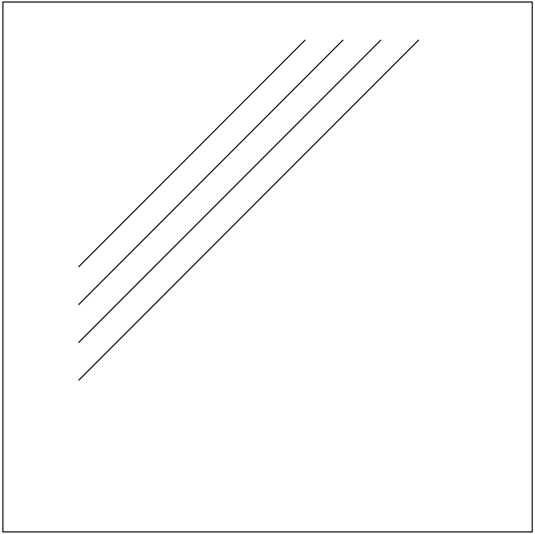
- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább három különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- ~~Párhuzamossági axióma~~

Helyette:

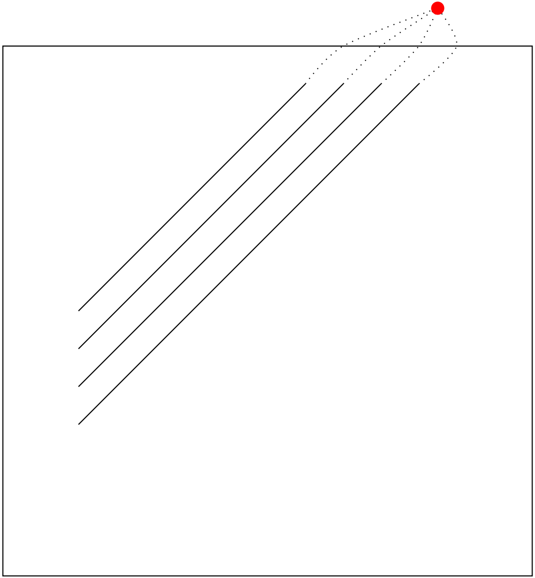
Bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást.

Projektív sík

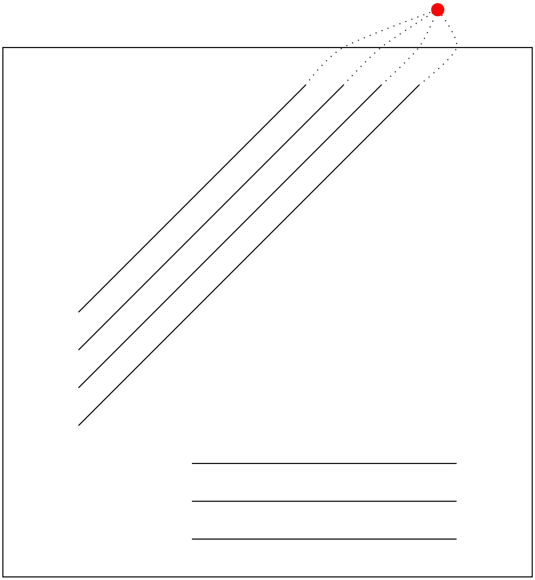
Projektív sík



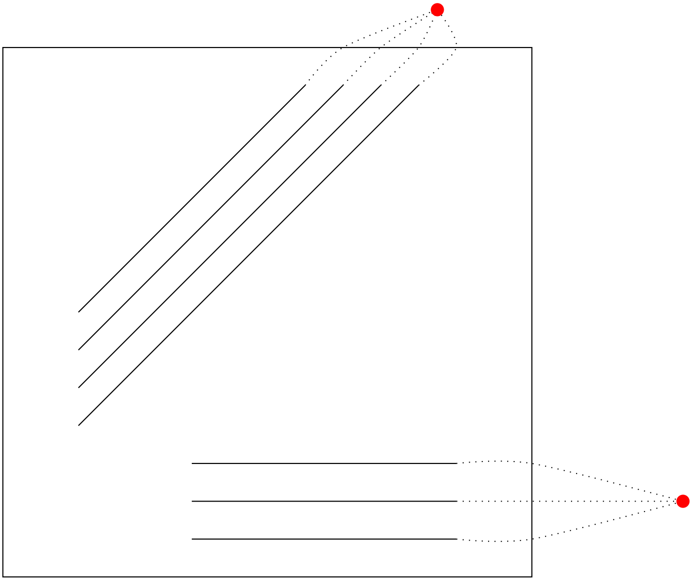
Projektív sík



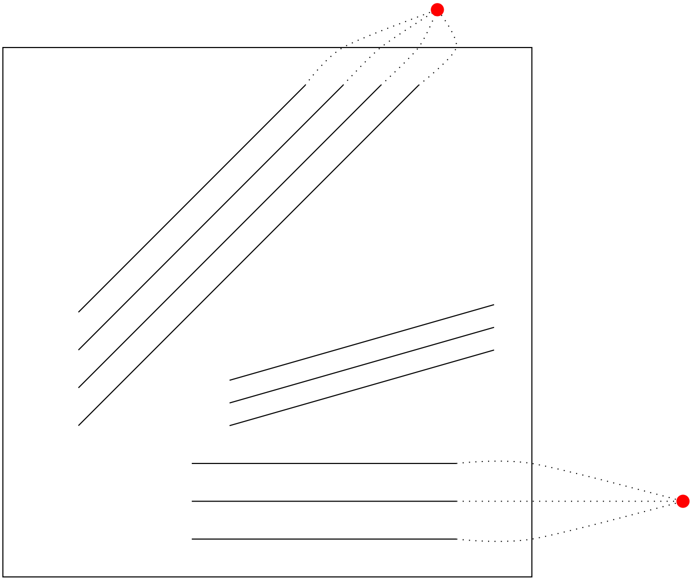
Projektív sík



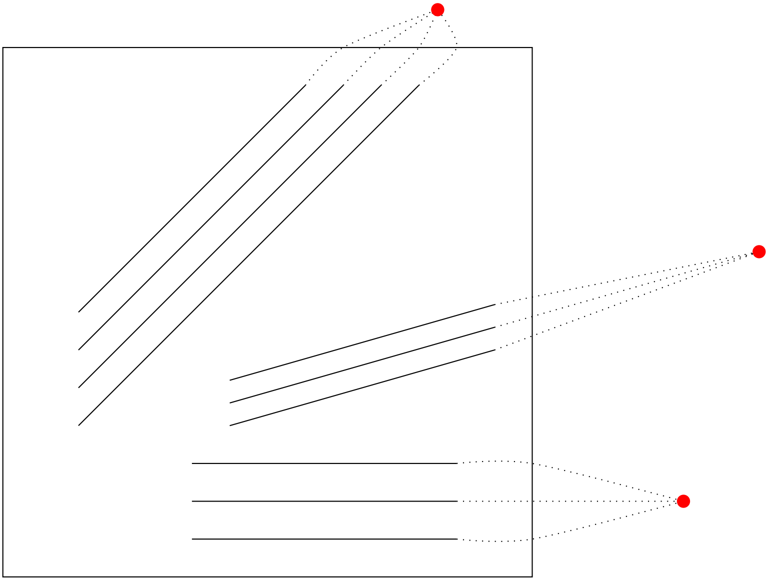
Projektív sík



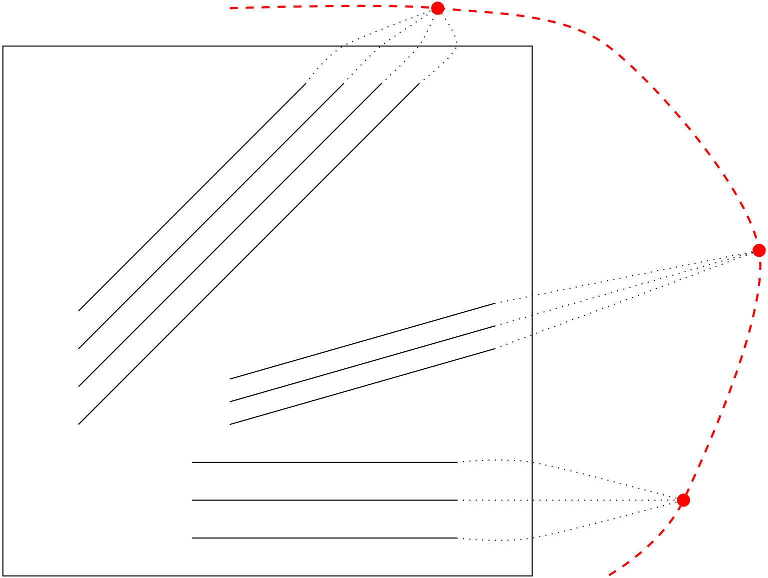
Projektív sík



Projektív sík



Projektív sík



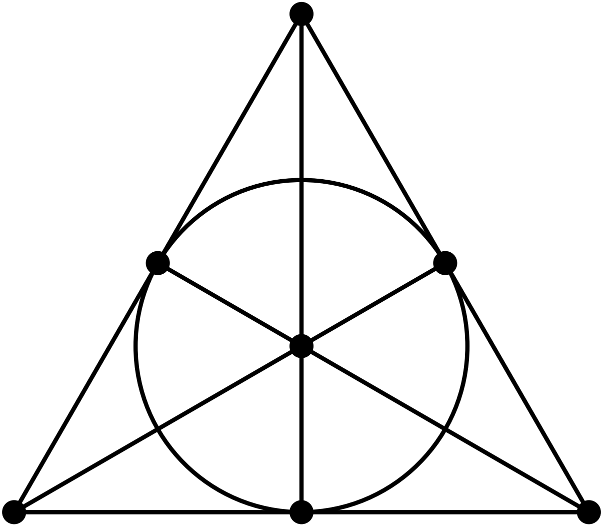
Projektív sík

- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább három különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- ~~Párhuzamossági axióma~~

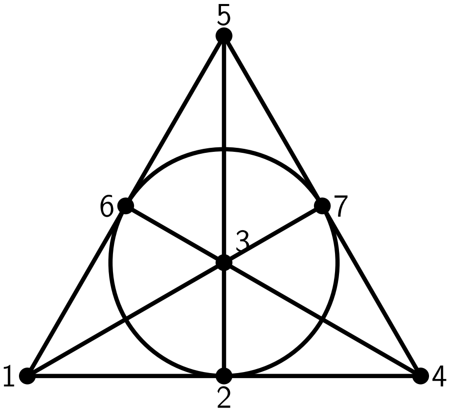
Helyette:

Bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást.

Fano-sík

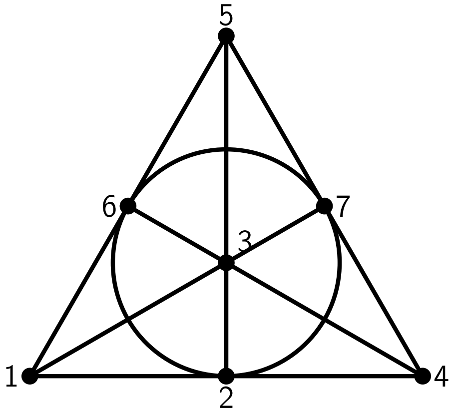


Fano-sík



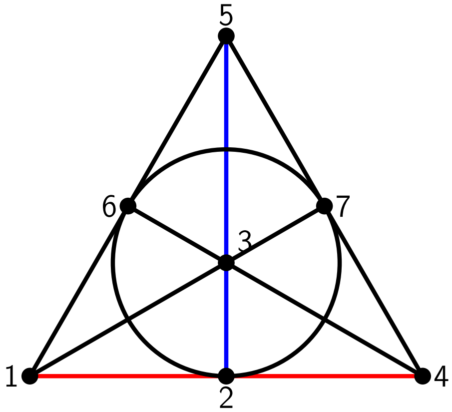
Ponthalmaz: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Fano-sík

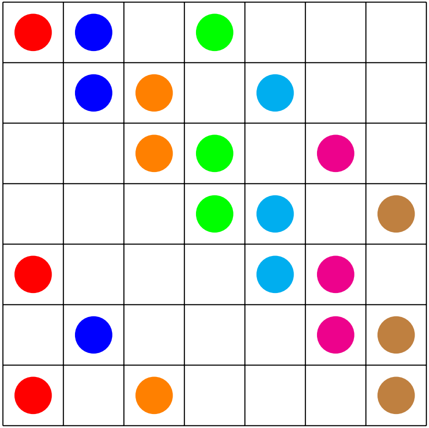


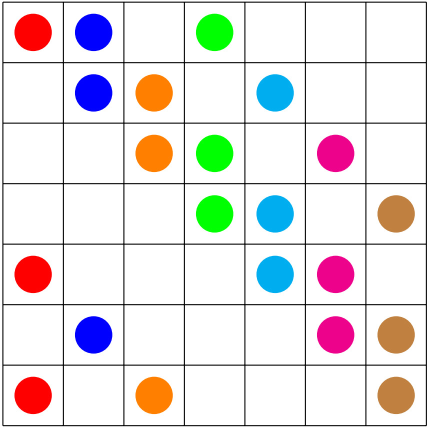
Ponthalmaz: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Egyenesek:
$\{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{2, 6, 7\}\}$

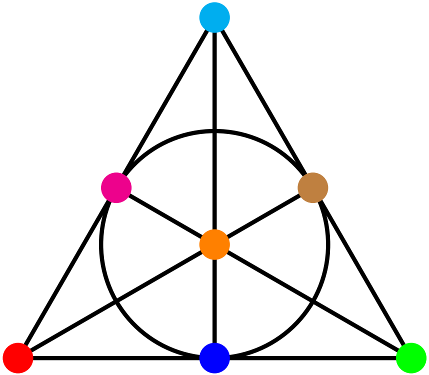
Fano-sík

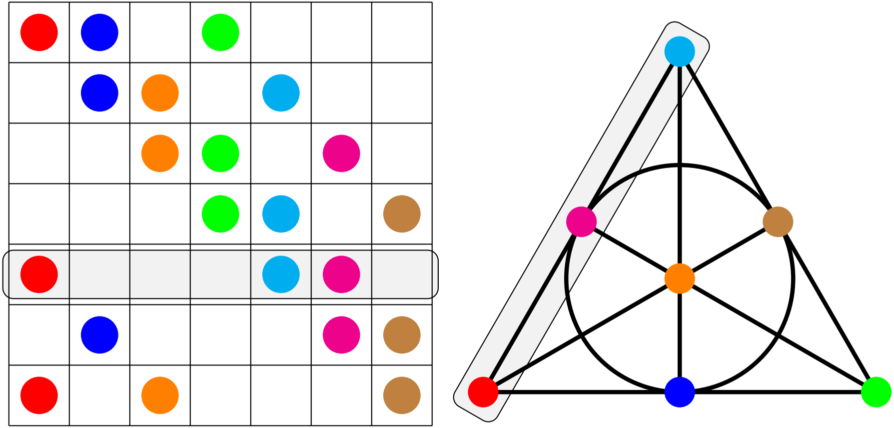


Ponthalmaz: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Egyenesek:
$\{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{2, 6, 7\}\}$



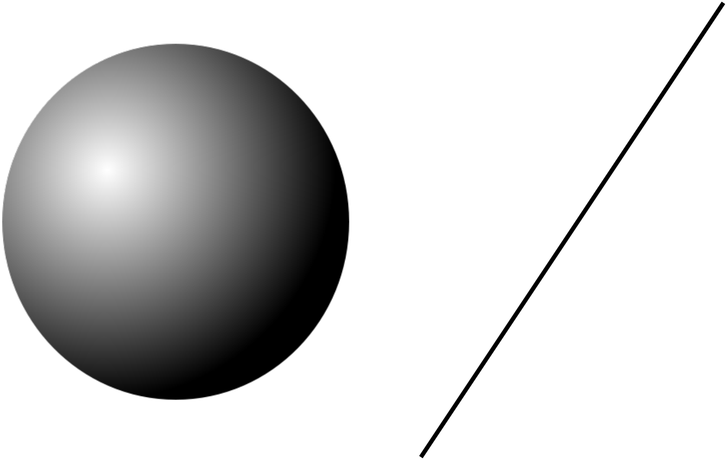






Köszönöm a figyelmet!

Kitérő



Gömbi geometria