# 3- és 4-hálózatok projektív beágyazásai

## Projective embeddings of 3- and 4-nets

Bogya Norbert

Bolyai Intézet

2014. március 27.

# Alapfogalmak

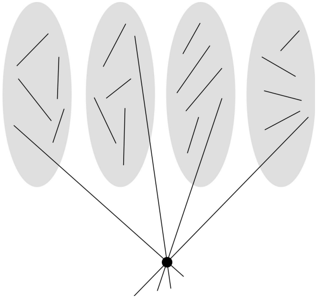
## $k$-net

A $k$-net $k$ darab páronként diszjunkt egyeneshalmaz úgy, hogy minden olyan pont, ami két halmazbeli egyenes metszéspontja, az pontosan egy egyenesre illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma $n$, akkor $n$-rendű $k$-netről beszélünk.

# Alapfogalmak

## *k*-net

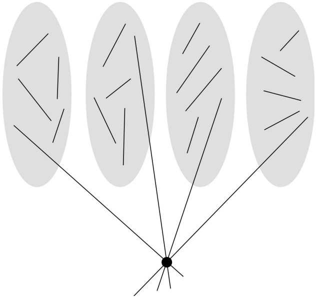
A $k$-net $k$ darab páronként diszjunkt egyeneshalmaz úgy, hogy minden olyan pont, ami két halmazbeli egyenes metszéspontja, az pontosan egy egyenesre illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma $n$, akkor $n$-rendű $k$-netről beszélünk.



# Alapfogalmak

## $k$-net

A $k$-net $k$ darab páronként diszjunkt egyeneshalmaz úgy, hogy minden olyan pont, ami két halmazbeli egyenes metszéspontja, az pontosan egy egyenesre illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma $n$, akkor $n$-rendű $k$-netről beszélünk.



- Származtatott $(k-1)$-net.

# Alapfogalmak

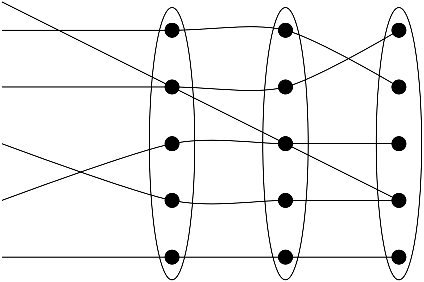
## Duális $k$-net

A duális $k$-net $k$ darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma $n$, akkor $n$-rendű duális $k$-netről beszélünk.

# Alapfogalmak

## Duális $k$-net

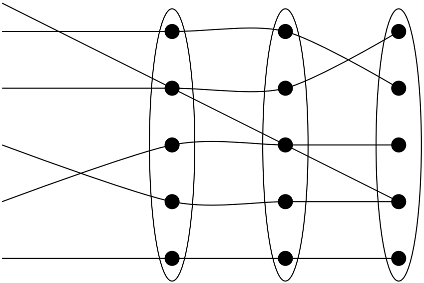
A duális $k$-net $k$ darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma $n$, akkor $n$-rendű duális $k$-netről beszélünk.



# Alapfogalmak

## Duális $k$-net

A duális $k$-net $k$ darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma $n$, akkor $n$-rendű duális $k$-netről beszélünk.



- Származtatott duális $(k-1)$-net.

# Perspektív duális 3-net

- $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ ponthalmazok (komponensek)
- $|\Lambda_i| = n$

# Perspektív duális 3-net

- $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ ponthalmazok (komponensek)
- $|\Lambda_i| = n$

**$C$ -re perspektív duális 3-net**

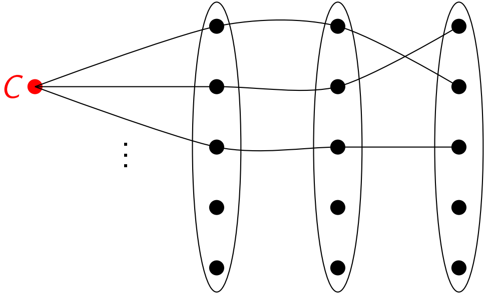
$C \notin \cup\Lambda_i$ és minden olyan egyenes, mely átmegy $C$-n és az egyik komponens egy pontján, akkor az összes komponens egy pontján is átmegy.

# Perspektív duális 3-net

- $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ ponthalmazok (komponensek)
- $|\Lambda_i| = n$

**$C$ -re perspektív duális 3-net**

$C \notin \cup\Lambda_i$ és minden olyan egyenes, mely átmegy $C$-n és az egyik komponens egy pontján, akkor az összes komponens egy pontján is átmegy.



# Csoportokkal koordinátázható 3-netek $PG(2,\mathbb{K})$-ban

Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.

# Csoportokkal koordinátázható 3-netek $PG(2, \mathbb{K})$-ban

Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.

# Csoportokkal koordinátázható 3-netek $PG(2, \mathbb{K})$-ban

Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.
Bijektív leképezések: $\alpha\colon G \to \mathcal{A}$, $\beta\colon G \to \mathcal{B}$, $\gamma\colon G \to \mathcal{B}$.

# Csoportokkal koordinátázható 3-netek $PG(2,\mathbb{K})$-ban

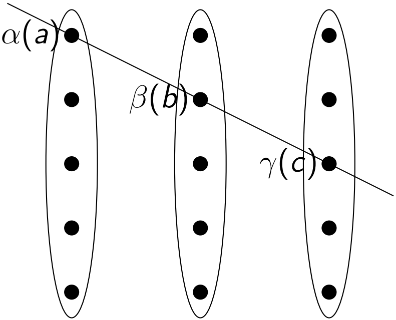
Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.
Bijektív leképezések: $\alpha\colon G \to \mathcal{A}$, $\beta\colon G \to \mathcal{B}$, $\gamma\colon G \to \mathcal{B}$.
A 3-net realizálja a $G$ csoportot, ha bármely $a, b, c \in G$ esetén

$$a \cdot b = c \quad \iff \quad \alpha(a), \beta(b), \gamma(c) \text{ egy ponton metszi egymást.}$$

# Csoportokkal koordinátázható duális 3-netek $PG(2, \mathbb{K})$-ban

Pontosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.
Bijektív leképezések: $\alpha\colon G \to \mathcal{A}$, $\beta\colon G \to \mathcal{B}$, $\gamma\colon G \to \mathcal{B}$.
A duális 3-net realizálja a $G$ csoportot, ha bármely $a, b, c \in G$ esetén

$$a \cdot b = c \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(a), \beta(b), \gamma(c) \text{ kollineáris.}$$



# Kettősviszony

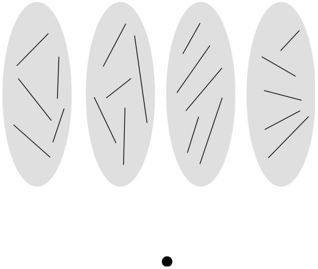
**Tétel (Korchmáros, Nagy, Pace, 2013)**

Egy $PG(2, \mathbb{K})$-beli 4-net kettősviszonya konstans.

# Kettősviszony

**Tétel (Korchmáros, Nagy, Pace, 2013)**

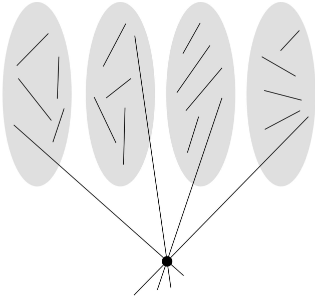
Egy $PG(2, \mathbb{K})$-beli 4-net kettősviszonya konstans.



# Kettősviszony

**Tétel (Korchmáros, Nagy, Pace, 2013)**

Egy PG$(2, \mathbb{K})$-beli 4-net kettősviszonya konstans.



# Kettősviszony

**Tétel (Korchmáros, Nagy, Pace, 2013)**

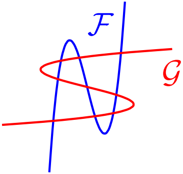
Duális 4-net kettősviszonya konstans, azaz minden olyan egyenesre, mely az összes komponenst metszi, a négy metszéspont kettősviszonya konstans.

# Kettősviszony

## Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $F, G$ két $n$-edfokú homogén polinom olyan, hogy az $\mathcal{F}\colon F=0$ és $\mathcal{G}\colon G=0$ görbéknek $n^2$ különböző közös pontja van. Rögzítsük az $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ nemnulla skalárokat, és vegyük a $H=\alpha F+\beta G$ és $H'=\alpha' F+\beta' G$ polinomokat, és a megfelelő $\mathcal{H}\colon H=0$ és $\mathcal{H}'\colon H'=0$ görbéket. Ekkor minden $P\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ pontra a $t_P(\mathcal{F})$,$t_P(\mathcal{G})$,$t_P(\mathcal{H})$,$t_P(\mathcal{H}')$ érintők kettősviszonya

$$\kappa=\frac{\alpha\beta'}{\alpha'\beta}.$$



# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1.

# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1.
   $\Longrightarrow P$ sima

# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1.
   $\Longrightarrow P$ sima $\Longrightarrow t_P(\mathcal{F}) \neq t_P(\mathcal{G})$

# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1.
   $\Longrightarrow P$ sima $\Longrightarrow t_P(\mathcal{F}) \neq t_P(\mathcal{G})$
2. $F, G, H, H'$ skalárszorzás erejéig egyértelműen meghatározott.

# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1.
$\Longrightarrow P$ sima $\Longrightarrow t_P(\mathcal{F}) \neq t_P(\mathcal{G})$
2. $F, G, H, H'$ skalárszorzás erejéig egyértelműen meghatározott. Skalárszorzásnál az $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{H}'$ göbék nem változnak

# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1.
   $\Longrightarrow P$ sima $\Longrightarrow t_P(\mathcal{F}) \neq t_P(\mathcal{G})$
2. $F, G, H, H'$ skalárszorzás erejéig egyértelműen meghatározott. Skalárszorzásnál az $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{H}'$ göbék nem változnak $\Longrightarrow \kappa$ nem változik.

# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1.
$\Longrightarrow P$ sima $\Longrightarrow t_P(\mathcal{F}) \neq t_P(\mathcal{G})$
2. $F, G, H, H'$ skalárszorzás erejéig egyértelműen meghatározott. Skalárszorzásnál az $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{H}'$ göbék nem változnak $\Longrightarrow \kappa$ nem változik.
3. A proj. koord. rendszer megváltoztatása az $(\alpha, \beta)$ és $(\alpha' \beta')$ párokat invariánsan hagyja

# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1. $\Longrightarrow P$ sima $\Longrightarrow t_P(\mathcal{F}) \neq t_P(\mathcal{G})$
2. $F, G, H, H'$ skalárszorzás erejéig egyértelműen meghatározott. Skalárszorzásnál az $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{H}'$ göbék nem változnak $\Longrightarrow \kappa$ nem változik.
3. A proj. koord. rendszer megváltoztatása az $(\alpha, \beta)$ és $(\alpha' \beta')$ párokat invariánsan hagyja $\Longrightarrow \kappa$ nem változik.

# Kettősviszony

1. Minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontnak a metszési multiplicitása 1.
   $\Longrightarrow P$ sima $\Longrightarrow t_P(\mathcal{F}) \neq t_P(\mathcal{G})$
2. $F, G, H, H'$ skalárszorzás erejéig egyértelműen meghatározott. Skalárszorzásnál az $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{H}'$ göbék nem változnak $\Longrightarrow \kappa$ nem változik.
3. A proj. koord. rendszer megváltoztatása az $(\alpha, \beta)$ és $(\alpha' \beta')$ párokat invariánsan hagyja $\Longrightarrow \kappa$ nem változik.

Koord. rendszer:

$$P = (0,0,1),\ \ t_P(\mathcal{F})\colon X = 0,\ \ t_P(\mathcal{G})\colon\ Y = 0,$$
$$\text{végtelen távoli egyenes: } Z = 0$$

.

Legyen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ egy $n$-edrendű 3-net $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ban.

Legyenek a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ egyenesei:

$$r_1 = 0, \ldots, r_n = 0, w_1 = 0, \ldots, w_n = 0, t_1 = 0, \ldots, t_n = 0.$$

Definiáljuk az $F, G, H$ polinomokat:

$$F = \prod_i r_i, G = \prod_i w_i, H = \prod_i t_i.$$

Legyen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ egy $n$-edrendű 3-net $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ban.

Legyenek a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ egyenesei:

$$r_1 = 0, \ldots, r_n = 0, w_1 = 0, \ldots, w_n = 0, t_1 = 0, \ldots, t_n = 0.$$

Definiáljuk az $F, G, H$ polinomokat:

$$F = \prod_i r_i, G = \prod_i w_i, H = \prod_i t_i.$$

Megmutatható:

- $\deg(F) = \deg(G) = \deg(H) = n$.
- A megfelelő görbéknek $n^2$ közös pontja van.
- A metszéspontokba húzott érintők különbözőek.
- Létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, hogy $H = \alpha F + \beta G$.

## Transzverzális

Az $\ell$ egyenes a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ transzverzális egyenese, ha az $\ell$ egyenes a 3-net összes egyenesét összesen $n$ pontban metszi.

## Transzverzális

Az $\ell$ egyenes a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ transzverzális egyenese, ha az $\ell$ egyenes a 3-net összes egyenesét összesen $n$ pontban metszi.

Legyenek transzverzális metszéspontjai $P_1, \ldots, P_n$ és $Q$ az $\ell$ egy másik pontja.

## Transzverzális

Az $\ell$ egyenes a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ transzverzális egyenese, ha az $\ell$ egyenes a 3-net összes egyenesét összesen $n$ pontban metszi.

Legyenek transzverzális metszéspontjai $P_1, \ldots, P_n$ és $Q$ az $\ell$ egy másik pontja.

Ekkor léteznek egyértelmű $\alpha', \beta'$ skalárok, hogy a $\mathcal{H}' \colon \alpha' F + \beta' G$ görbe átmegy $Q$-n.

## Transzverzális

Az $\ell$ egyenes a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ transzverzális egyenese, ha az $\ell$ egyenes a 3-net összes egyenesét összesen $n$ pontban metszi.

Legyenek transzverzális metszéspontjai $P_1, \ldots, P_n$ és $Q$ az $\ell$ egy másik pontja.

Ekkor léteznek egyértelmű $\alpha', \beta'$ skalárok, hogy a $\mathcal{H}' \colon \alpha' F + \beta' G$ görbe átmegy $Q$-n.

$\mathcal{H}'$ foka $n$ és $|\ell \cap \mathcal{H}'| \geq n+1 \Longrightarrow \ell$ a $\mathcal{H}'$ komponense $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}' = \ell \cup \mathcal{H}_0$

## Transzverzális

Az $\ell$ egyenes a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ transzverzális egyenese, ha az $\ell$ egyenes a 3-net összes egyenesét összesen $n$ pontban metszi.

Legyenek transzverzális metszéspontjai $P_1, \dots, P_n$ és $Q$ az $\ell$ egy másik pontja.

Ekkor léteznek egyértelmű $\alpha', \beta'$ skalárok, hogy a $\mathcal{H}' \colon \alpha' F + \beta' G$ görbe átmegy $Q$-n.

$\mathcal{H}'$ foka $n$ és $|\ell \cap \mathcal{H}'| \geq n + 1 \Longrightarrow \ell$ a $\mathcal{H}'$ komponense $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}' = \ell \cup \mathcal{H}_0$

$\mathcal{H}_0$ nem megy át $P_i$-ken $\Longrightarrow \mathcal{H}'$ érintője a $P_i$-kben $\ell$.

# Kettősviszony

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ egy $n$-ed rendű 3-net $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ban. Tegyük fel, hogy $\ell$ transzverzális. Ekkor létezik egy olyan $\kappa$ skalár, hogy minden $P \in \ell \cap \lambda$ ($P = m_1 \cap m_2 \cap m_3$, $m_1 \in \lambda_1$, $m_2 \in \lambda_2$, $m_3 \in \lambda_3$) pontra az $\ell, m_1, m_2, m_3$ egyenesek kettős viszonya $\kappa$.

# Kettősviszony

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ egy $n$-ed rendű 3-net $PG(2, \mathbb{K})$-ban. Tegyük fel, hogy $\ell$ transzverzális. Ekkor létezik egy olyan $\kappa$ skalár, hogy minden $P \in \ell \cap \lambda$ ($P = m_1 \cap m_2 \cap m_3$, $m_1 \in \lambda_1$, $m_2 \in \lambda_2$, $m_3 \in \lambda_3$) pontra az $\ell, m_1, m_2, m_3$ egyenesek kettős viszonya $\kappa$.

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ egy $n$-ed rendű duális 3-net $PG(2, \mathbb{K})$-ban. Tegyük fel, hogy $\Lambda$ perspektív a $T$ pontra nézve. Ekkor létezik egy olyan $\kappa$ skalár, hogy az összes $T$-n átmenő $\ell$ egyenes esetén a $T, \ell \cap \Lambda_1, \ell \cap \Lambda_2, \ell \cap \Lambda_3$ pontok kettősviszonya $\kappa$.

# Duális 3-netek osztályozása

- **Algebrai**: ha a pontjai egy harmadrendű görbén helyezkednek el.
  - Tiszta algebrai
  - Kúpszelet-egyenes típusú
  - Reguláris

# Duális 3-netek osztályozása

- **Algebrai**: ha a pontjai egy harmadrendű görbén helyezkednek el.
  - Tiszta algebrai
  - Kúpszelet-egyenes típusú
  - Reguláris
- **Reguláris**: minden komponense egy-egy egyenesen van.
  - **Trianguláris**: egy komponens egyenesei háromszöget határoznak meg.
  - **Sugársor alakú**: egy komponens egyenesei egy pontra illeszkednek.

# Duális 3-netek osztályozása

- **Algebrai**: ha a pontjai egy harmadrendű görbén helyezkednek el.
  - Tiszta algebrai
  - Kúpszelet-egyenes típusú
  - Reguláris
- **Reguláris**: minden komponense egy-egy egyenesen van.
  - **Trianguláris**: egy komponens egyenesei háromszöget határoznak meg.
  - **Sugársor alakú**: egy komponens egyenesei egy pontra illeszkednek.
- **Tetraéder típusú**: ha a pontjai egy nemelfajuló négyszög oldalain és átlóin helyezkednek el.

# Trianguláris és tetraéder típusú duális 3-netek

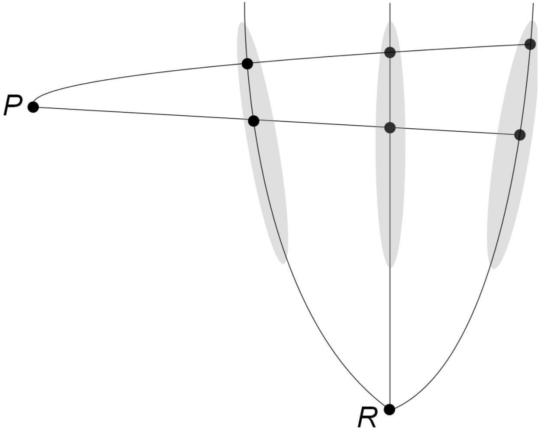
**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Minden reguláris perspektív duális 3-net sugársor alakú.

# Trianguláris és tetraéder típusú duális 3-netek

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Minden reguláris perspektív duális 3-net sugársor alakú.



Sugársor alakú duális 3-net nulla karakterisztika fölött **nem létezik**.

Pozitív karakterisztika esetén is csak akkor, ha a karakterisztika osztója a rendnek.

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Nulla karakterisztikájú test felett nem létezik reguláris perspektív duális 3-net. Ez olyan pozitív karakterisztikára is igaz, ha a duális 3-net rendje kisebb, mint a karakterisztika.

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Nulla karakterisztikájú test felett nem létezik perspektív tetraéder típusú duális 3-net. Ez olyan pozitív karakterisztikára is igaz, ha a duális 3-net rendje kisebb, mint a karakterisztika.

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Nulla karakterisztikájú test felett nem létezik perspektív tetraéder típusú duális 3-net. Ez olyan pozitív karakterisztikára is igaz, ha a duális 3-net rendje kisebb, mint a karakterisztika.

**Következmény (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\mathbb{K}$ egy nulla vagy $n$-nél nagyobb karakterisztikájú algebrailag zárt test. Ekkor nincs olyan $n$-rendű duális 4-net $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ban, melynek a származtatott duális 3-nete trianguláris, vagy tetraéder típusú.

# Kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net

$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net

Rendje: $n \geq 5$.

$\Lambda_1$ pontjai egy $\ell$ egyenesen van.

$\Lambda_2, \Lambda_3$ pontjai egy $\mathcal{C}$ kúpszeleten vannak.

Perspektív a $T$ pontra.

# Kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net

$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net

Rendje: $n \geq 5$.

$\Lambda_1$ pontjai egy $\ell$ egyenesen van.

$\Lambda_2, \Lambda_3$ pontjai egy $\mathcal{C}$ kúpszeleten vannak.

Perspektív a $T$ pontra.

Korábbi állítás $\Longrightarrow$ $\Lambda$-nak a $T$-re vonatkozó kettősviszonya konstans.

# Kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net

$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net

Rendje: $n \geq 5$.

$\Lambda_1$ pontjai egy $\ell$ egyenesen van.

$\Lambda_2, \Lambda_3$ pontjai egy $\mathcal{C}$ kúpszeleten vannak.

Perspektív a $T$ pontra.

Korábbi állítás $\Longrightarrow$ $\Lambda$-nak a $T$-re vonatkozó kettősviszonya konstans.

**Lemma**

$\kappa = -1$ és $T$ az $\ell$ polárisa a $\mathcal{C}$-ből eredő polaritásban.

Proj. koord. rendszer: $T = (0, 0, 1)$, $\ell\colon Z = 0$, $\mathcal{C}\colon XY = Z^2$.
Megmutatható, hogy $\Lambda$-nak van egységgyökös paraméterezése:

$$\Lambda_2 = \{(c, c^{-1}), (c\xi, c^{-1}\xi^{-1}), \ldots, (c\xi^{n-1}, c^{-1}\xi^{-n+1})\},$$

ahol $c \in \mathbb{K}^*$ és $\xi$ egy $n$-edik egységgyök.
Az $u\colon (x, y) \mapsto (-x, -y)$ perspektivitás $\Lambda_2$-t elviszi $\Lambda_3$-ba:

$$\Lambda_3 = \{(-c, -c^{-1}), (-c\xi, -c^{-1}\xi^{-1}), \ldots, (-c\xi^{n-1}, -c^{-1}\xi^{-n+1})\}.$$

Ha $n$ páros, akkor $\xi^{n/2} = -1$. Így $n$ páratlan, és

$$\Lambda_1 = \{(c^{-2}), (c^{-2}\xi), \ldots, (c^{-2}\xi^{n-1})\}.$$

**Lemma**

Páratlan $n$ esetén a fenti kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net perspektív $T$-re.

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\mathbb{K}$ nulla vagy $n$-nél nagyobb karakterisztikájú algebrailag zárt test. Ekkor minden $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$-beli perspektív $n$-rendű kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net projektíven ekvivalens az előző oldalon mutatott duális 3-nettel.

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\mathbb{K}$ nulla vagy $n$-nél nagyobb karakterisztikájú algebrailag zárt test. Ekkor minden $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$-beli perspektív $n$-rendű kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net projektíven ekvivalens az előző oldalon mutatott duális 3-nettel.

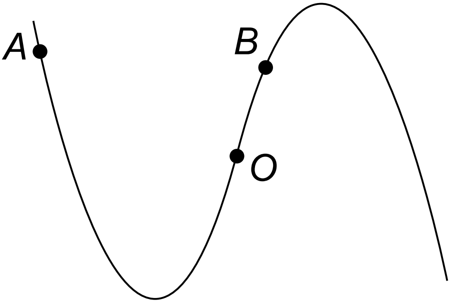
**Következmény (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\mathbb{K}$ nulla vagy $n$-nél nagyobb karakterisztikájú algebrailag zárt test. Ekkor nem létezik olyan $n$-rendű duális 4-net $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$-ban, melynek származtatott duális 3-nete kúpszelet-egyenes típusú.

# Harmadrendű görbe

## Összeadás a harmadrendű görbén

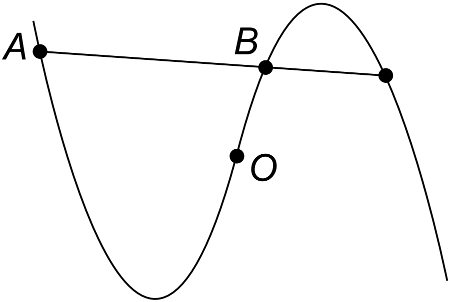
Legyen $\Gamma$ egy harmadrendű görbe, $\Gamma^*$ pedig a sima pontjainak halmaza. Rögzítsünk egy $O \in \Gamma^*$ pontot. Ekkor az $A, B \in \Gamma^*$ pontok összegét a lenti ábra szerint értelmezzük.



# Harmadrendű görbe

## Összeadás a harmadrendű görbén

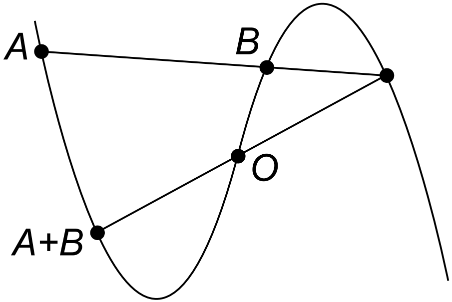
Legyen $\Gamma$ egy harmadrendű görbe, $\Gamma^*$ pedig a sima pontjainak halmaza. Rögzítsünk egy $O \in \Gamma^*$ pontot. Ekkor az $A, B \in \Gamma^*$ pontok összegét a lenti ábra szerint értelmezzük.



# Harmadrendű görbe

## Összeadás a harmadrendű görbén

Legyen $\Gamma$ egy harmadrendű görbe, $\Gamma^*$ pedig a sima pontjainak halmaza. Rögzítsünk egy $O \in \Gamma^*$ pontot. Ekkor az $A, B \in \Gamma^*$ pontok összegét a lenti ábra szerint értelmezzük.



# Harmadrendű görbe

**Tétel**

Legyen $\Gamma$ egy irreducibilis harmadrendű görbe $\mathbb{K}$ test feletti proj. síkon. Legyen $\Gamma^*$ a sima pontok halmaza, és rögzítsünk egy $O \in \Gamma^*$ pontot. Az előbb definiált művelettel $(\Gamma^*, +, O)$ Abel-csoport.

# Harmadrendű görbe

**Tétel**

Legyen $\Gamma$ egy irreducibilis harmadrendű görbe $\mathbb{K}$ test feletti proj. síkon. Legyen $\Gamma^*$ a sima pontok halmaza, és rögzítsünk egy $O \in \Gamma^*$ pontot. Az előbb definiált művelettel $(\Gamma^*, +, O)$ Abel-csoport.

**Tétel**

1. Ha $\Gamma$: $Y = X^3$ alakú, akkor $(\Gamma^*, +) \cong (K, +)$.
2. Ha $\Gamma$: $Y^2 = X^3$ alakú, akkor $(\Gamma^*, +) \cong (K, +)$.
3. Ha $\Gamma$: $Y^2 = X^3 + X^2$ alakú, akkor $(\Gamma^*, +) \cong (K^*, \cdot)$.

# Tiszta algebrai duális 3-net

$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ egy $\Gamma$ irreducibilis köbös görbén helyezkedik el.
Feltétel: $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2, 3\}$.

| $\Gamma$ alakja | Infl. pontok | Kanonikus alak |
|---|---|---|
| nemszinguláris | 9 | $Y^2 = X(X-1)(X-c)$ |
| masni | 3 | $Y^2 = X^3$ |
| csúcsos | 1 | $Y^2 = X^3 + X^2$ |

# $j$-invariáns

A $j$-invariáns izomorfia erejéig meghatározza az elliptikus görbéket.

## $j$-invariáns

Ha a $\Gamma$ köbös görbe $Y = X(X-1)(X-c)$ alakban adható meg, akkor a görbe $j$-invariánsa

$$j(\Gamma) = 2^8 \frac{(c^2 - c + 1)^3}{c^2(c-1)^2}.$$

## Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\Gamma$ egy irreducibilis köbös görbe $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ban, ahol $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test és $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2, 3\}$. Legyenek a $P_i, Q_i, R_i \in \Gamma$ $(i = 1, \ldots, 7)$ páronként különböző nemszinguláris pontok úgy, hogy rögzített $i$-re a $P_i, Q_i, R_i$ pontok kollineárisak. Tegyük fel, hogy $T \notin \Gamma$, illetve $T, P_i, Q_i, R_i$ kollineáris, valamint a $(T, P_i, Q_i, R_i)$ kettősviszony konstans $\kappa$. Ekkor $j(\Gamma) = 0$.

### Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\Gamma$ egy irreducibilis köbös görbe $PG(2,\mathbb{K})$-ban, ahol $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test és $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2,3\}$. Legyenek a $P_i, Q_i, R_i \in \Gamma$ $(i = 1,\ldots,7)$ páronként különböző nemszinguláris pontok úgy, hogy rögzített $i$-re a $P_i, Q_i, R_i$ pontok kollineárisak. Tegyük fel, hogy $T \notin \Gamma$, illetve $T, P_i, Q_i, R_i$ kollineáris, valamint a $(T, P_i, Q_i, R_i)$ kettősviszony konstans $\kappa$. Ekkor $j(\Gamma) = 0$.

### Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Az előző feltételek mellett

(i) a projektív koordináta-rendszer megválasztható úgy, hogy $\Gamma\colon X^3 + Y^3 = 1$ és $T = (0,0)$,

(ii) létezik egy 3-adrendű perspektivitás a $T$ középponttal, ami $\Gamma$-ra invariáns,

(iii) $\kappa$ az $X^2 - X + 1$ valamelyik gyöke.

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test úgy, hogy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2, 3\}$. Legyen $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2\Lambda_3)$ legalább 7-edrendű duális 3-net, ami egy irreducibilis $\Gamma$ görbén fekszik. Ha $\Gamma$ szinguláris, vagy nemszinguláris és $j(\Gamma) \neq 0$, akkor $\Lambda$ nem perspektív. Ha $j(\Gamma) = 0$, akkor legfeljebb három pont létezik, melyre nézve $\Lambda$ perspektív.

### Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test úgy, hogy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2,3\}$. Legyen $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2 \Lambda_3)$ legalább 7-edrendű duális 3-net, ami egy irreducibilis $\Gamma$ görbén fekszik. Ha $\Gamma$ szinguláris, vagy nemszinguláris és $j(\Gamma) \neq 0$, akkor $\Lambda$ nem perspektív. Ha $j(\Gamma) = 0$, akkor legfeljebb három pont létezik, melyre nézve $\Lambda$ perspektív.

### Következmény (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test úgy, hogy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2,3\}$. Ekkor nem létezik olyan legalább 7-rendű duális 4-net, melynek származtatott duális 3-nete köbös görbén fekszik.

# Összefoglaló tétel

**Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)**

Legyen $\Lambda$ egy csoporttal koordinátázott $n$-rendű duális 3-net. Tegyük fel, hogy $\Lambda$ a $PG(2,\mathbb{K})$-ba van ágyazva egy olyan $\mathbb{K}$ test felett, melyre $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ vagy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) > n$. Ha $\Lambda$ perspektív és $n \neq 8$, akkor a következő két eset lehetséges.

(i) $\Lambda$ egyik komponense egy egyenesen, a másik két komponense pedig egy nemszinguláris kúpszeleten fekszik.

(ii) $\Lambda$ egy nemszinguláris $\mathcal{C}$ harmadrendű görbén fekszik, melyre $j(\mathcal{C}) = 0$. Ekkor $\Lambda$ legfeljebb három pontra perspektív.

Köszönöm a figyelmet!

# Példa perspektív, tiszta algberai duális 3-netre

$\Gamma\colon X^3+Y^3=Z^3$, $T=(0,0,1)$ és $u\colon (x,y,z)\mapsto(\varepsilon x,\varepsilon y,z)$, ahol $\varepsilon$ harmadik egységgyök.

$O(1,-1,0)$ inflexiós pont, invariáns $u$-ra.

Az $u$ invariáns $\Gamma$-ra is $\Longrightarrow$ $u$ indukál egy automorfizmust $(\Gamma,+,O)$-n.

Legyen $H\leq(\Gamma,+)$ egy $n$-rendű részcsoport, melyre $H^u=H$.

Ekkor minden $P\in\Gamma$ pontra, ha $P-P^u\notin H$, akkor a

$$\Lambda_1=H+P,\quad \Lambda_2=h+P^u,\quad \Lambda_3=H+P^{u^2}$$

mellékosztályok duális 3-netet adnak, ami perspektív a $T$-re.