Képakasztó játék

Bogya Norbert
nbogya@math.u-szeged.hu

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
Matematika Összeköt Egyesület

Medve Élménynap, 2020


KÉPAKASZTÓ
JÁTÉK
PICTURE
HANGING
PUZZLE

Eredet

Különös festmény. *Quantum Magazine* (A. Spivak, 1997)

Dr. Smile rendelőjének várótermében egy kép lóg a falon. A kép különlegessége abban rejlik, ahogy fel lett akasztva. Dr. Smile egy helyett kettő szöget vert a falba, és úgy akasztotta fel rájuk a festményt, hogy ha bármelyik szöget kihúzzuk, a festmény leesik. Hogyan csinálta?

Strange painting. *Quantum Magazine* (A. Spivak, 1997)

There is a painting on the wall of Dr. Smile's waiting room. The unusual thing about this painting is the way it's hung. Dr. Smile hammered two nails (instead of one) into the wall. He says that he has wound the picture wire around these nails in such away that the painting would fall if either the nail were pulled out. How did he do it?

Feladatok

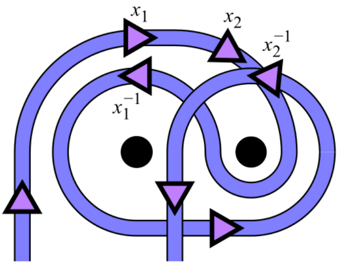
1. Feladat

Hogyan akasszunk fel egy képet 2 szögre úgy, hogy akármelyik szöget kihúzva a falból leessen a kép?

1. Feladat

Hogyan akasszunk fel egy képet 2 szögre úgy, hogy akármelyik szöget kihúzva a falból leessen a kép?

Megoldás.



Mutatom a módszert...

- A két szöget jelölje a és b.
- Egy szög felett kétféleképpen lehet „csavarni”:
  - óramutató járásával megegyezően: a, b;
  - óramutató járásával ellentétesen: a^{-1}, b^{-1}.
- Egyetlen szabály: ha x és x^{-1} egymás mellé kerül, akkor kiütik egymást.
- Az előző feladat megoldása:

$$aba^{-1}b^{-1}$$

Feladatok

2. Feladat

Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy ha az első és második szöget kihúzzuk, a festmény essen le, illetve essen le a festmény akkor is, ha a harmadik szöget kihúzzuk, de ha a csak az első vagy csak a második szöget húzzuk ki, akkor maradjon fenn. (Vagyis a festmény pontosan akkor essen le, ha kihúztuk az 1. és 2. szögeket, vagy kihúztuk a 3. szöget.)

Feladatok

2. Feladat

Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy ha az első és második szöget kihúzzuk, a festmény essen le, illetve essen le a festmény akkor is, ha a harmadik szöget kihúzzuk, de ha a csak az első vagy csak a második szöget húzzuk ki, akkor maradjon fenn. (Vagyis a festmény pontosan akkor essen le, ha kihúztuk az 1. és 2. szögeket, vagy kihúztuk a 3. szöget.)

Megoldás.

- **Kulcsötlet**: az egyik szög legyen „duplaszög”: $a = xy$
- Két szögre a megoldás: $aba^{-1}b^{-1}$
- A fenti feladatra a megoldás:

$$xyby^{-1}x^{-1}b^{-1}$$

Feladatok

3. Feladat

Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy bármely két szöget kihúzva a falból a festmény essen le, de egy szöget kihúzva soha.

Feladatok

3. Feladat

Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy bármely két szöget kihúzva a falból a festmény essen le, de egy szöget kihúzva soha.

Megoldás.

$$abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$$

4. Feladat

Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy bármely szöget kihúzva a falból a festmény essen le.

4. Feladat

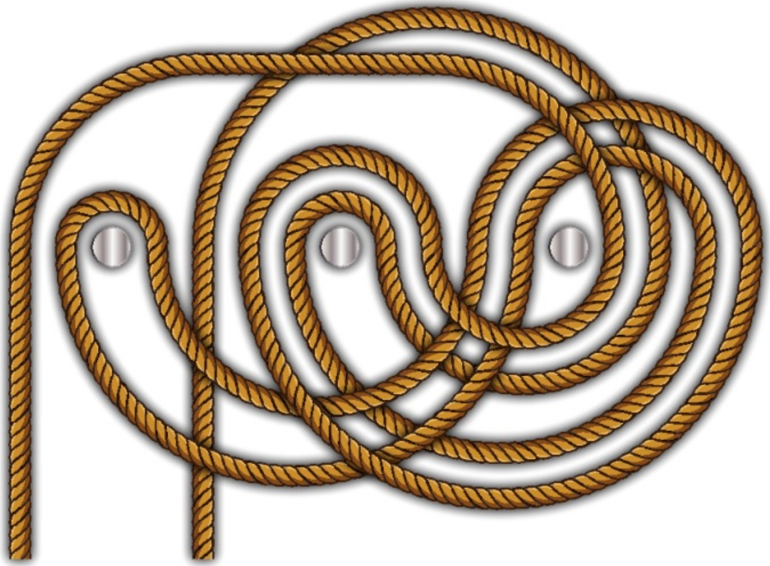
Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy bármely szöget kihúzva a falból a festmény essen le.

Megoldás.

- Két szögre a megoldás: $m = aba^{-1}b^{-1}$
- A harmadik szögre a megoldás: $mcm^{-1}c^{-1}$
- Végső megoldás:

$$aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1}$$

4. Feladat megoldása



Feladatok

5. Feladat

Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy a festmény pontosan akkor essen le, ha kihúzzuk az 1-es és 2-es szögeket, vagy kihúzzuk a 2-es és a 3-as szögeket.

6. Feladat

Akasszuk fel a festményt négy szögre úgy, hogy a festmény pontosan akkor essen le,

(a) ha kihúzunk három szöget.

(b) ha kihúzzuk az 1-es és 2-es szögeket, vagy a 3-as és 4-es szögeket.

(c) ha valamelyik szöget kihúzzuk.

Megoldások

- 5. Feladat:

$$abca^{-1}c^{-1}$$

- 6. (a) Feladat:

$$abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$$

- 6. (b) Feladat:

$$abcdb^{-1}a^{-1}d^{-1}c^{-1}$$

- 6. (c) Feladat:

$$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}bab^{-1}a^{-1}dcd^{-1}c^{-1}$$

Általánosítás

$(1, n)$-játék

Akasszuk fel a képet n darab szögre úgy, hogy bármelyik szöget kihúzva, a festmény essen le.

Tétel (Demaine et al. (2012))

Az $(1, n)$-játéknak van legfeljebb $2n^2$ hosszú megoldása.

n	Megoldás	Megoldás hossza	$2n^2$
2	$aba^{-1}b^{-1}$	4	8
3	$aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1}$	10	18

Általánosítás

$(1, n)$-játék

Akasszuk fel a képet n darab szögre úgy, hogy bármelyik szöget kihúzva, a festmény essen le.

Tétel (Fulek, Avvakumov (2017))

Az $(1, n)$-játék megoldása legalább $n \cdot 2^{\sqrt{\log_2 n}}$.

n	Megoldás	$n \cdot 2^{\sqrt{\log_2 n}}$	Megoldás hossza	$2n^2$
2	$aba^{-1}b^{-1}$	4	4	8
3	$aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1}$	7,1797	10	18

Durva feladat

Feladat*

Akasszuk fel a festményt 2 piros, 2 kék és 2 zöld szögre úgy, hogy pontosan akkor essen le, ha 2 darab különböző színű szöget húzunk ki a falból.

Durva feladat megoldása

$$x_1 x_3 x_2 x_4 x_1 x_5 x_4^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_1 x_5 x_2 x_4 x_5^{-1} x_1^{-1} x_4^{-1} x_2^{-1} x_3 x_6 x_1 x_4 x_2 x_3 x_4^{-1}$$

$$x_1^{-1} x_3^{-1} x_2^{-1} x_6^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3 x_1 x_4 x_3^{-1} x_2^{-1} x_4^{-1} x_1^{-1} x_2 x_4 x_1 x_5 x_4^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_1^{-1} x_1 x_3 x_1 x_5$$

$$x_2 x_4 x_5^{-1} x_1^{-1} x_4^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_1 x_4 x_2 x_3 x_4^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_2^{-1} x_3 x_6 x_2 x_3 x_1 x_4 x_3^{-1} x_2^{-1} x_4^{-1}$$

$$x_1^{-1} x_6^{-1} x_3^{-1} x_1 x_6 x_2 x_5 x_4 x_6 x_5^{-1} x_2^{-1} x_6^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} x_1^{-1} x_4 x_6 x_2 x_5 x_6^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} x_2^{-1} x_3 x_5$$

$$x_2 x_6 x_4 x_5 x_6^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_4 x_5 x_2 x_6 x_5^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} x_2^{-1} x_2 x_5 x_4 x_6 x_5^{-1} x_2^{-1} x_6^{-1}$$

$$x_4^{-1} x_1 x_6 x_4 x_6 x_2 x_5 x_6^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} x_2^{-1} x_6^{-1} x_1^{-1} x_2 x_6 x_4 x_5 x_6^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_4^{-1} x_3 x_5 x_4 x_5 x_2 x_6$$

$$x_5^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_3 x_6 x_1 x_4 x_2 x_3 x_4^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_2^{-1} x_6^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3 x_1 x_4 x_3^{-1} x_2^{-1}$$

$$x_4^{-1} x_1^{-1} x_1 x_3 x_2 x_4 x_1 x_5 x_4^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_1 x_5 x_2 x_4 x_5^{-1} x_1^{-1} x_4^{-1} x_2^{-1} x_1 x_4 x_2 x_3$$

$$x_4^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_2^{-1} x_3 x_6 x_2 x_3 x_1 x_4 x_3^{-1} x_2^{-1} x_4^{-1} x_1^{-1} x_6^{-1} x_3^{-1} x_2 x_4 x_1 x_5 x_4^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_1^{-1}$$

$$x_1 x_3 x_1 x_5 x_2 x_4 x_5^{-1} x_1^{-1} x_4^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_5 x_2 x_6 x_4 x_5 x_6^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_4 x_5$$

$$x_2 x_6 x_5^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} x_2^{-1} x_1 x_6 x_2 x_5 x_4 x_6 x_5^{-1} x_2^{-1} x_6^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} x_1^{-1} x_4 x_6 x_2 x_5 x_6^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1}$$

$$x_2^{-1} x_2 x_6 x_4 x_5 x_6^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_4^{-1} x_3 x_5 x_4 x_5 x_2 x_6 x_5^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_2 x_5 x_4 x_6 x_5^{-1}$$

$$x_2^{-1} x_6^{-1} x_4^{-1} x_1 x_6 x_4 x_6 x_2 x_5 x_6^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} x_2^{-1} x_6^{-1} x_1^{-1}$$

Köszönöm a figyelmet!

Bogya Norbert
nbogya@math.u-szeged.hu
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet,
Matematika Összeköt Egyesület

A téma ötletért, valamint a demonstrációs eszközökért köszönet kollégámnak, Dr. Vígh Viktornak.