

Nagy Gábor Péter

# Bol-tükrözések alkalmazásai

doktori disszertáció

Témavezető: Dr. Szőnyi Tamás (ELTE)

JATE Bolyai Intézet, Szeged  
1999.



*Szüleimnek, akiknek mindent köszönhetek*



# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>6</b>
<b>1. Alapfogalmak</b>	<b>10</b>
1.1. Csoportelméleti fogalmak . . . . .	10
1.2. Algebrai megközelítés . . . . .	11
1.3. A geometriai nézőpont . . . . .	17
1.4. Kollineációk . . . . .	21
1.5. Univerzális tulajdonságok, konfigurációk . . . . .	24
<b>2. Bol-loopok</b>	<b>27</b>
2.1. Definíciók . . . . .	28
2.2. Bol-tükrözések, a Bol-loop szíve . . . . .	31
2.3. $B$ -loopok . . . . .	32
2.4. Struktúraelmélet $B$ -loopokra . . . . .	37
2.5. Példák . . . . .	41
<b>3. Moufang-loopok és 3-hálózatok</b>	<b>43</b>
3.1. Moufang-loopok . . . . .	43
3.2. Moufang-hálózatok és csoportok triaritással . . . . .	46
3.3. Példák egyszerű Moufang-loopokra . . . . .	51
<b>4. Speciális looposztályok</b>	<b>53</b>
4.1. Bal konjugált zárt és Burn-féle loopok . . . . .	54
4.2. Burn-konstrukciók és csoportinvariánsaik . . . . .	58
4.3. Involutórikus Bol-loopok . . . . .	65
4.4. Bol-féle univerzális 2-loopok . . . . .	67
<b>Utószó</b>	<b>70</b>
<b>Summary in English</b>	<b>71</b>

# Bevezetés

Az első impulzust nem-asszociatív struktúrák tanulmányozására a geometria alapjainak megteremtése, ezen belül a nem-Desargues-féle síkok koordinátázásának kérdései adták századunk első évtizedeiben. W. BLASCHKE érdeklődését loopok és kvázicsoportok iránt a differenciálgeometria topológiai kérdései motiválták ([Bla38]). R. BAER [Bae39], A.A. ALBERT [Alb43, Alb44] és R.H. BRUCK [Bru58] alkották meg a kvázicsoportok és loopok önálló algebrai elméletét. Baer számára a loophoz rendelt geometria töltött be fontos szerepet, míg Bruck tárgyalásában az elmélet az univerzális algebra része. Albert a loop eltolásainak halmazát mint szelést tekintette az általuk generált csoportban. A loopok és kvázicsoportok elmélete ebben a három irányban fejlődött ki az utóbbi 50 évben. Fontos irány loopok topológiai algebrai, topológiai geometriai és differenciálgeometriai keretekben történő vizsgálata, amely K.H. HOFMANN, H. SALZMANN, M.A. AKIVIS és L.V. SABININ nevéhez fűződik, ld. a [Che90] összefoglaló gyűjteményt, valamint NAGY PÉTER T. és K. STRAMBACH előkészület alatt álló [NS99] monográfiáját.

A témakör nyugati nyelvű standard referenciái közé a [Bru58], [Pfl90], [Che90] és [BS83] művek számítanak, orosz nyelven a [Bel76] művet említjük meg.

Jelen dolgozatban a loopokat, kvázicsoportokat és a hozzájuk társított geometriákat mint absztrakt objektumot tanulmányozzuk. Ennek a megközelítésnek egyik fontos képviselője V.D. BELOUSOV [Bel76].

A loopelméleti kutatások kezdetétől fogva kiemelt jelentőséggel bírt a *Moufang-loopok* osztálya ([Mou34], [Bru58]). Ennek tanulmányozása során több olyan fogalom fejlődött ki, amelyek egy bővebb osztály, a *Bol-loopok* vizsgálatánál is hatékonyabbnak bizonyult. Egy ilyen eszköz a loop szíve, amely szorosan kapcsolódik az  $x \mapsto x^{-1}$  inverzképzés involutórikus műveletéhez (ld. [Bru58], [Gla64],[Gla68]). Mint kiderült, ez az involúció a loophoz társított 3-hálózat szimmetriájával is összefügg. Ezeket a szimmetriákat a [FN93] után *Bol-tükrözéseknek* nevezzük.

A Bol-tükrözések által biztosított geometriai megközelítés nagyban leegyszerűsíti néhány algebrai tulajdonság, mint például a loophoz társított izotópiainvariáns fogalmak vizsgálatát, és pontosabb ismereteket nyújt a loophoz kapcsolt algebrai, geometriai és csoportelméleti fogalmak egymáshoz való viszonyáról.

A Bol-tükrözések elméletének *továbbfejlesztése*, illetve az elmélet *alkalmazása* több irányban képzelhető el. Az egyik lehetséges irány a véges Bol-loopok és involutórikus Bol-loopok témaköréhez, ezen belül a téziseink végén megfogalmazott *három problémához kapcsolódik*. Ezek a problémák a csoportelmélet nyelvén megfogalmazva is érdeklődésre tartanak számot. Egy másik szóba jöhető alkalmazás az *algebrai B-loopok témaköre*, ahol is az első természetes lépés az algebrai kommutatív Moufang-loopok leírása lehet.

A disszertációban közölt tudományos eredmények közül a kisebb súlyúak "Állítás", a fontosabbak "Tétel" megnevezéssel szerepelnek. Ezeknek szinte mindegyike *új eredményeket* tartalmaz. Egyes esetekben, az új eredményinkből korábbi ismert tételek *új bizonyítását* nyerjük. Azoknál a tételeknél, amelyek nem saját eredmények, a tétel címkéjében a szerző(k) nevét is feltüntettük. Az állításoknál ezt nem tettük meg, ott a bizonyítások előtt, illetve minden fejezet elején összefoglaló módon megadtuk a más szerzőktől származó eredmények referenciáit. Ugyanez vonatkozik a kisebb jelentőségű következményekre és megjegyzésekre is.

Az **első fejezet** áttekintő jellegű. Itt a célunk az volt, hogy a loopok és a 3-hálózatok elméletének legfontosabb részeit összefoglaljuk oly módon, hogy a szakterületen kevésbé járatos olvasók számára is könnyen megérthető legyen. A fejezetben egy későbbiekben hasznos kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot bizonyítunk a loopok nukleuszai, a megfelelő oldali eltoláscsoport centralizátora, és egy megfelelő párhuzamossági osztályt rögzítő kollineációk csoportja között (ld. 1.2.8 és 1.5.3 tételek).

A **második fejezetben** Bol-loopok és  $B$ -loopok, valamint a hozzájuk tartozó 3-hálózatok tulajdonságait tárgyaljuk. A Bol-loop szíve (ld. [Bel65, Rob66]) és a Bol-tükrözések (ld. [FN93]) fogalmának felhasználásával a loopok algebrai tulajdonságainak geometriai vonatkozásait vizsgáljuk. A fejezet fő eredménye, hogy azon Bol-loopok geometriai jellemzése, amelyeknél az invertálás jobb oldali pseudo-automorfizmus (vö. a 2.3.3, 2.3.5 és 2.3.6 tételek). Ebben az újszerű megközelítésben áttekintést adunk G. GLAUBERMAN loopelméleti eredményeiről (ld. 2.4 alfejezet) és  $B$ -loopok egy struktúratételét bizonyítjuk be (2.3.6 tétel).

A **harmadik fejezet** fő eredménye (a 3.2.5 és 3.2.4 tételek), hogy a trialitással rendelkező csoportok közvetlenül megfeleltethetők a Moufang-looppal koordinátázott 3-hálózatoknak. Ezeknek a tételek a Bol-tükrözések felhasználásával S. DORO [Dor78] cikkében leírt trialitás-funktort általánosítja a Moufang-féle 3-hálózatok osztályára. A fejezetben ismertetjük a véges egyszerű Moufang-loopok osztályozásának főbb lépéseit (vö. 3.2.10 tétel). Az osztályozás, mely M.W. LIEBECK nevéhez fűződik, a [Dor78]-beli eredményeken alapszik. A fejezet végén a Cayley-számok osztásgyűrűjének konstrukcióját és a hozzájuk szorosan kapcsolódó egyszerű Moufang-loopoknak L.J. PAIGE-féle leírását ismertetjük.

A **negyedik fejezetben** speciális looposztályokkal foglalkozunk. A 4.1 alfejezetben a bal konjugált zárt és a Burn-loopok osztályát vizsgáljuk, ezek algebrai illetve a  $\Phi : N_0 \rightarrow G(L)$  leképezés magjára vonatkozó tulajdonságokat bizonyítunk (vö. 4.1.6 tétel). A 4.2 alfejezetben részletesen leírjuk a [Bur78, Bur81]-ben megadott loop-konstrukciókat. Ezek a konstrukciók az előző alfejezetben vizsgált looposztályba tartoznak, az ottani eredményeink felhasználásával explicit kiszámoljuk a loopokhoz, illetve az általuk meghatározott 3-hálózatokhoz tartozó automorfizmus- és kollineációcsoportokat (4.2.3, 4.2.6 és 4.2.8 tételek).

A 4.3 alfejezetben 2 exponensű Bol-loopokat vizsgálunk. Mint kiderül, ezek a loopok is a Burn-féle osztályba tartoznak. Ilyen loopokra viszonylag kevés példa ismert, ezek mindegyike származtatható a [KK95] cikkbeli konstrukcióból, amelyről belátjuk, hogy két eleme generálja (4.3.1 tétel). A 4.4 alfejezetben tárgyalt Bol-féle univerzális 2-loop tulajdonságot az előző alfejezetben vizsgált loopok motiválják. Az alfejezet eredményei Bol-féle 2-loopok feloldhatóságára adnak szükséges és elegendő feltételeket: A 4.4.3 tétel szerint minden univerzális Bol-féle 2-loop feloldható, a 4.4.5 tétel szerint pedig ha egy Bol-loop bármely két eleme 2-hatvány rendű részloopot generál, akkor a loop feloldható. Ez a tétel teremt kapcsolatot a 4.3.1 tétel és a fejezetben megfogalmazott három nyitott kérdés között.

## Köszönetnyilvánítások

E helyen szeretném megköszönni mindazok munkáját és támogatását, akik a disszertáció megírásában segítségemre voltak. Mindenekelőtt szüleimnek szeretnék köszönetet mondani a sok segítségért, türelméért, buzdításért és tanácsért.

Külön köszönet illeti DR. SZŐNYI TAMÁS (ELTE) témavezetőmet többéves fáradozásáért, DR. KORCHMÁROS GÁBOR (Potenza, Olaszország) professzor urat, akinek a hatására ezzel a területtel foglalkozni kezdtem, és DR.



KARL STRAMBACH professzor urat (Erlangen, Németország) érdeklődéséért és támogatásáért. Köszönettel tartozom az Universität Erlangen-Nürnberg (Németország) és az Università di Basilicata (Olaszország) egyetemek matematikai intézeteinek vendégszeretetéért is.

A doktori tanulmányaimhoz 1995. és 1998. között az alábbi intézményektől kaptam anyagi támogatást: Országos Tudományos Kutatási Alap (F021271, T020066), a Magyar Művelődési Minisztérium Felsőoktatási Kutatási és Fejlesztési Pályázata (FKFP-0152/1997), Soros Alapítvány (1995), Eötvös Állami Ösztöndíj (1998).

# 1. fejezet

## Alapfogalmak

Ebben a fejezetben, bevezető jellegéből kifolyólag, nem szerepelnek jelentősebb önálló eredmények. Célunk az volt, hogy a loopok és a 3-hálózatok elméletének legfontosabb részeit összefoglaljuk oly módon, hogy az szakterületen kevésbé járatos olvasók számára is könnyen megérthető legyen. A témakör nyugati nyelvű standard referenciái közé a [Bru58], [Pfl90], [Che90] és [BS83] művek számítanak, ezekből a fejezet állításai és tételei több-kevesebb erőfeszítéssel összeollózhatók.

A kivételt talán az 1.2.8 és 1.5.3 tételek képezik, amelyek tartalma valószínűsíthetően más, a területtel foglalkozó kutatók számára is ismert, ebben a számunkra hasznos formátumban azonban eleddig – tudomásunk szerint – nem került publikálásra.

### 1.1. Csoportelméleti fogalmak

Dolgozatunkban számos, a csoportelméletből származó fogalmat és jelölést használunk, elsőként ezeket röviden összefoglaljuk. Az  $x, y, z, g$  és  $x_i$  betűkkel értelemszerűen egy  $G$  csoport elemeit jelöljük.

$$x^y = y^{-1}xy, [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y, [x_1, \dots, x_n] = x_1^{-1} \dots x_n^{-1}x_1 \dots x_n,$$

$$X^g = \{x^g; x \in X\}, g^X = \{g^x; x \in X\}, \text{ ahol } X \subseteq G,$$

$$\alpha \in \text{Aut}(G) \text{ esetén } g^\alpha = \alpha(g), [g, \alpha] = g^{-1}g^\alpha = g^{-1}\alpha(g),$$

$\text{InnAut}(G) = \{\varphi_x : G \rightarrow G; x \in G\}$  a  $G$  belső automorfizmusainak csoportja,

ahol  $\varphi_x : g \mapsto g^x$  az  $x$  által indukált belső automorfizmus,

$$Z(G) = \{z \in G; gz = zg \ \forall g \in G\} \text{ a } G \text{ csoport centruma,}$$

$$C_X(Y) = \{x \in X; xy = yx \ \forall y \in Y\} \text{ az } Y \subseteq G \text{ halmaz } X\text{-beli centralizátora} \\ (X \subseteq G).$$

A  $G$  véges csoportot  $p$ -csoportnak nevezzük, ha a  $|G|$  rendje  $p$ -hatvány. Jelölje  $\pi$  prímszámok egy halmazát. A  $G$  véges csoportot  $\pi$ -csoportnak ne-

vezzük, ha a  $|G|$  minden  $p$  prímosztójára  $p \in \pi$  teljesül. A  $G$  *exponense* az a legkisebb  $e$  pozitív egész, amelyre  $g^e = 1$  teljesül minden  $g \in G$  elemre. A  $H \leq G$  részcsoportot *karakterisztikus részcsoportnak* nevezzük, ha minden  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  automorfizmusra  $\alpha(H) \leq H$ .

A  $G$  csoport *tranzitívan* hat az  $X$  halmazon, ha minden  $x, y \in X$  elemre létezik  $g \in G$  úgy, hogy  $g(x) = y$ . A  $G$  hatása *élesen tranzitív*, ha a  $g : x \mapsto y$  csoportelem egyértelműen meghatározott. Az adott csoportthatás esetén az  $S \subseteq G$  halmazt *élesen tranzitív halmaznak* hívjuk, ha minden  $x, y \in X$  elemre pontosan egy  $s \in S$  elem létezik az  $s(x) = y$  tulajdonsággal.

$\mathbb{Z}_n$  fogja jelölni az  $n$ -edrendű ciklikus csoportot,  $\mathbb{Z}_n^*$  pedig a modulo  $n$  multiplikatív inverzzel rendelkező elemek (multiplikatív) csoportját. Mint ismeretes,  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n^*$ .  $S_n$  az  $n$  elemen ható szimmetrikus csoportot,  $D_n$  pedig az  $n$ -edrendű diédercsoportot fogja jelölni.

## 1.2. Algebrai megközelítés

Ebben az alfejezetben kvázicsoportokkal és a hozzájuk tartozó geometriai pont-egyenes illeszkedési struktúrákkal foglalkozunk. A kvázicsoportok osztálya a csoport nem-asszociatív általánosításának tekinthető. Ezen osztály egy alosztálya az egységelemes kvázicsoportok osztálya, melynek megnevezésére megfelelő magyar fordítás hiányában a *loop* szót fogjuk használni, angol helyesírás szerint. A szó szerinti fordítás *hurok* lehetne, mivel azonban az általunk használt fogalomnak semmi köze sincs az algebrai topológiában előforduló hurkokhoz, ezért a terminológia átvétele zavaró lenne. Megjegyezzük, hogy a létező magyar és német szakirodalom is az angol elnevezést használja.

**1.2.1. Definíció.** A binér művelettel ellátott  $(Q, \cdot)$  halmazt kvázicsoportnak nevezzük, ha a szorzásművelet mindkét oldalról invertálható, azaz az

$$x \cdot a = b, \quad c \cdot y = d$$

egyenletek minden  $a, b, c, d \in Q$  esetén az  $x$  illetve  $y$  változóiban egyértelműen megoldhatók. A megoldásokra az  $x = b/a$  és  $y = d \setminus c$  jelöléseket alkalmazzuk.

Az  $(L, \cdot)$  kvázicsoportot loopnak nevezzük, ha létezik egységelem, azaz van az  $L$  halmazban egy kitüntetett  $e \in L$  elem, melyre minden  $x \in L$  esetén teljesül az

$$e \cdot x = x \cdot e = x$$

azonosság.

Ezeket a fogalmakat az univerzális algebra nyelvén is definiálhatjuk. Ekkor a kvázicsoportot mint három binér művelettel rendelkező  $(Q, \cdot, /, \setminus)$  algebraát, a

loopot pedig mint három binér és egy unér művelettel rendelkező  $(L, \cdot, /, \backslash, e)$  algebrát adhatom meg, az

$$x \cdot (x \backslash y) = y, \quad (x / y) \cdot y = x, \quad x \backslash (x \cdot y) = x, \quad (x \cdot y) / y = x$$

illetve az

$$e \cdot x = x \cdot e = x$$

azonosságokkal.

A későbbiekben a loop egységelemét 1 fogja jelölni, a szorzásműveletre pedig az  $x \cdot y$  helyett a rövidebb  $xy$  jelölést alkalmazzuk. Ily módon zárójeleket is megspórolunk: az  $xy \cdot z$  pontosan kiírva  $(x \cdot y) \cdot z$  alakban állna.

A most következő két példa megmutatja, hogy az asszociativitás elhagyásával milyen messzire eltávolodunk az ismerős csoportfogalomtól.

*	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

·	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	5	4	2	1
4	4	3	1	5	2
5	5	4	2	1	3

Az első  $(\mathbb{Z}_3, *)$  példa mutatja, hogy a kvázicsoportok osztálya szigorúan bővebb a loopok osztályánál, sőt az egyik oldali egységelem megléte nem garantálja a másik oldali egységelem létezését.

A második  $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$  példában már loopról van szó, melynek rendje 5, és amely tartalmaz egy másodrendű elemet:  $2 \cdot 2 = 1$ . Még ennél is meglepőbb lehet, hogy a hagyományos értelemben az elemek rendjéről sincs értelme beszélni, hisz

$$3 \cdot 3 = 4 \quad \text{és} \quad 4 \cdot 3 \neq 3 \cdot 4,$$

azaz már a 3 elem harmadik hatványát sem tudjuk egyértelműen megadni.

Mindezek alapján tehát értelmes annak az általános kérdésnek a vizsgálata, hogy mely csoportelméleti tételt tudjuk kiterjeszteni loopok valamely osztályára. Beszélhetünk továbbá *mono-asszociatív*, *hatvány-asszociatív* vagy éppen *Lagrange-féle* looposztályokról. Ezek a tulajdonságok írják le, hogy egy loopban egy elem pozitív ill. egész kitevős hatványai egymással asszociatívan szorozhatók, valamint hogy egy loop részloopjainak a rendje osztja a loop rendjét.

Ezek a példák azt is megmutatják, hogy a hagyományos csoportelméleti technikák nem igazán használhatók csak maga a loop a „belső” struktúrájának vizsgálatakor. Ezért a loophoz „kívülről” rendelünk különböző

permutáció- és szimmetriacsoportokat, amelyek közvetett módon szolgáltatnak információt a loopról.

A legfontosabb ilyen csoportok az *eltolás*csoportok. Rögzítsünk egy tetszőleges  $(L, \cdot)$  loopot. Bevezetjük a  $\lambda_x : L \rightarrow L$  bal és  $\rho_x : L \rightarrow L$  jobb oldali eltolás

$$\lambda_x(y) = xy, \quad \rho_x(y) = yx,$$

valamint a *bal* illetve *jobb oldali eltolás*csoport

$$G_{\text{bal}}(L) = \langle \lambda_x | x \in L \rangle, \quad G_{\text{jobb}}(L) = \langle \rho_x | x \in L \rangle$$

fogalmát. Az  $(L, \cdot)$  loop *teljes eltolás*csoportjának vagy *multiplikáció*csoportjának nevezzük az

$$M(L) = \langle G_{\text{bal}}(L), G_{\text{jobb}}(L) \rangle$$

csoportot. Nyilván mindhárom most definiált csoport egy-egy  $L$ -en ható tranzitív permutációcsoport. Mint várható, az egységelem stabilizátor rész-csoportja is fontos szerepet játszik, ezért erre külön jelölést vezetünk be:

$$I(L) = M(L)_1 \quad \text{és} \quad U(L) = G_{\text{bal}}(L)_1.$$

Az  $I(L)$  csoport elemeit *belső leképezéseknek* is nevezzük.

Példaként tekintsük azt az egyszerű esetet, amikor  $L$  csoport. Ekkor

$$G_{\text{bal}}(L) \cong L \cong G_{\text{jobb}}(L), \quad U(L) = \{1\}$$

valamint

$$M(L) \cong (L \times L)/Z, \quad I(L) = \text{InnAut}(L),$$

ahol  $Z = \{(c, c^{-1}); c \in Z(L)\}$  az  $L$   $Z(L)$  centrumával izomorf.

Az  $(L, \cdot)$  loop *bal oldali szelésének* nevezzük a bal eltolások

$$S(L) = \{\lambda_x | x \in L\}$$

halmazát. Hasonlóan definiálhatnánk a loop jobb oldali szelését, de mivel a későbbiekben szinte kivétel nélkül csak a bal oldali eltolások halmazát fogjuk vizsgálni, ezért szelés alatt is mindig bal oldali szelést értünk.

**1.2.2. Állítás.** *Az  $(L, \cdot)$  loop esetén*

$$U(L) = \langle \lambda_{xy}^{-1} \lambda_x \lambda_y; x, y \in L \rangle$$

és

$$I(L) = \langle \lambda_{xy}^{-1} \lambda_x \lambda_y, \rho_{xy}^{-1} \rho_y \rho_x, \rho_x^{-1} \lambda_x; x, y \in L \rangle.$$

*Bizonyítás.* Ld. [Bru58, IV. Lemma 1.2.] □

Az univerzális algebrából általánosan ismert fogalmak és tételek természetesen a loopok varietásában is érvényesek.

**1.2.3. Definíció.** Az  $(L, \cdot)$  loop  $K \subseteq L$  nem üres részhalmazát részloopnak nevezzük, ha  $K$  zárt a „ $\cdot$ ”, „/” és „\” műveletekre. A  $K$  részloopot normális részloopnak nevezzük, ha minden  $x, y \in L$  esetén teljesülnek az

$$xK = Kx, \quad x \cdot yK = xy \cdot K, \quad x \cdot Ky = xK \cdot y, \quad Kx \cdot y = K \cdot xy$$

azonosságok. (Jelölés:  $K \triangleleft L$ .)

Egyszerűen meggondolható, hogy a fenti négy követelmény közül az utolsó elhagyható, mert az következik az első hátról. Az is következik, hogy a  $K \leq L$  részloop akkor és csak akkor normális, ha minden  $h \in I(L)$  belső leképezésre  $h(K) = K$ .

Az  $L$  loop  $K$  részhalmaza akkor és csak akkor normális részloop, ha  $K$  előáll mint egy  $L \rightarrow \bar{L}$  szürjektív homomorfizmus magja, ekkor  $\bar{L} \cong L/K$ . (Ld. [Bru58, IV. Lemma 1.6. és Theorem 1.5].)

Az is nyilvánvaló, hogy  $K \triangleleft L$  esetén beszélhetünk az  $L$  loop  $K$  szerinti  $\{xK; x \in L\}$  mellékosztályairól, és a mellékosztályok halmazán a

$$xK \cdot yK = xy \cdot K$$

művelet definiálja az  $L/K$  faktorloopot. Az  $x \mapsto xK$  leképezés szürjektív homomorfizmus, melynek magja  $K$ .

Az  $L$  normális részloop-struktúráját könnyen leírhatjuk az  $M(L)$  multiplikációs csoport segítségével.

**1.2.4. Állítás.** Az  $(L, \cdot)$  loop normális részloopjai pontosan az  $M(L)$   $L$ -en ható permutációs csoport egységelemet tartalmazó imprimitív tartományai.

*Bizonyítás.* Legyen először  $K \triangleleft L$  normális részloop, és definiáljuk a

$$H = \{g \in M(L); g(K) = K\}$$

csoportot. A normalitás miatt  $I(L) \leq H$ . A részloop-tulajdonság miatt  $k \in K$  esetén  $\lambda_k(K) = \rho_k(K) = K$ , vagyis  $H$  tranzitívan hat  $K$ -n, azaz  $K$  imprimitív tartomány.

Fordítva, tekintsünk egy  $I(L) \leq H \leq M(L)$  részcsoporthat, és legyen  $K = H(1)$ . Mivel minden  $g \in M(L)$  elem egyértelműen felírható  $g = \lambda_x u = \rho_x v$  alakban ( $u, v \in I(L)$ ), következik, hogy az  $x$  elem akkor és csak akkor van  $K$ -ban, ha  $\lambda_x, \rho_x \in H$ . Ekkor  $xK = K = Kx$ , vagyis  $K \leq L$  részloop. Továbbá

$I(L) \leq H$  miatt a belső leképezések invariánsan hagyják  $K$ , ezért  $K \triangleleft L$  normális részloop. Az, hogy a  $K \leftrightarrow H$  megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, triviális.  $\square$

Sajnos csak az egyik oldali eltoláscsoportot használva nem tudunk ilyen elegáns leírást adni a normális részloopokról. A kevésbé elegáns megadáshoz még két csoportelméleti fogalmat kell értelmeznünk. Legyen  $U$  a  $G$  tetszőleges csoport egy részcsoportja. Ekkor

$$\text{core}_G(U) = \bigcap_{g \in G} U^g$$

az  $U$ -ban bennefoglalt legnagyobb  $G$ -normálosztó. Rögzített  $U$  esetén az  $N \triangleleft G$  normálosztó lezártja az

$$\bar{N} = \text{core}_G(NU)$$

normálosztó. Ha a  $G$  egy  $\Omega$ -n ható permutációcsoport, és  $U = G_1$  stabilizátor részcsoport, akkor  $\bar{N}$  azon elemek halmaza, amelyek az  $N$  normálosztóhoz tartozó összes imprimitivitási tartományt invariánsan hagyják.

Ezen definíció segítségével az alább kapcsolatot mutatjuk meg  $G_{\text{bal}}(L)$  normálosztói és  $L$  normális részloopjai között.

**1.2.5. Állítás.** (i)  $G(L)$  minden imprimitivitási tartománya részloop.

(ii) Legyen  $N$  a  $G = G_{\text{bal}}(L)$  csoport egy normálosztója. Ekkor  $K = N(1)$  akkor és csak akkor normális részloop, ha minden  $x \in L$  és  $k \in K$  esetén  $\lambda_x^{-1}\lambda_{xk} \in \bar{N}$ .

(iii) Minden 2 indexű részloop normális.

*Bizonyítás.* Legyen  $K$  a  $G(L)$  csoportnak egy, az egységelemet tartalmazó imprimitivitási tartománya. Az  $x \in K$  elem esetén  $1 \in K$  miatt  $K \cap \lambda_x(K) \neq \emptyset$ , tehát  $K = xK$ , azaz  $K = KK$ . Hasonlóan meggondolható  $K = K \setminus K$ . Tegyük most fel, hogy  $x, y \in K$  és legyen  $z = x/y$ . Ekkor  $x = zy$ , azaz  $K \cap \lambda_z(K) \neq \emptyset$ , s így  $K = zK$  ismét. Ebből viszont adódik  $z \in K$ , ami bizonyítja (i)-t.

A (ii) 'akkor' iránya rögtön adódik az  $\bar{N}$  fenti jellemzéséből. Tekintsük a 'csak akkor' irányt, legyen  $K = N(1)$ . Ekkor  $N(x) = N\lambda_x(1) = \lambda_x N(1) = xK$ , amiből  $K \leq L$  és  $x \cdot yK = xy \cdot K$  könnyen látható.  $\lambda_x^{-1}\lambda_{xk} \in \bar{N}$  pedig adja, hogy

$$\lambda_x^{-1}\lambda_{xk}(yK) = yK \iff xk \cdot yK = x \cdot yK = xy \cdot K,$$

vagyis  $xK \cdot yK = xy \cdot K$  teljesül, és  $K \triangleleft L$ .

Végül (iii) az analóg csoportelméleti tétel bizonyításának megismétlésével könnyen belátható.  $\square$

A következő tétel részloopok és faktorloopok multiplikációcsoportját írja le.

**1.2.6. Állítás.** *Tekintsük az  $(L, \cdot)$  loop  $H \leq L$  részloopját és  $K \triangleleft L$  normális részloopját. Definiáljuk az*

$$M_H = \langle \lambda_x, \rho_x; x \in H \rangle, \quad T_H = \{g \in M_H; g|_H = 1_H\},$$

és

$$G_H = \langle \lambda_x; x \in H \rangle, \quad N_K = \{g \in M(L); g(xK) = xK\}$$

permutációcsoportokat. Ekkor  $T_H \triangleleft M_H$ ,  $N_K \triangleleft M(L)$  és

$$\begin{aligned} M(H) &\cong M_H/T_H, & G_{\text{bal}}(H) &\cong G_H/(T_H \cap G_H), \\ M(L/K) &\cong M(L)/N_K, & G_{\text{bal}}(L/K) &\cong G_{\text{bal}}(L)/(N_K \cap G_{\text{bal}}(L)). \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* A faktorloopokról szóló részt ld. [Bru58, IV. Lemma 1.3.]. A részloopokról szóló kijelentés nyilvánvaló.  $\square$

A csoportok elméletében a centrum az, ami „belülről méri” a kommutativitástól való távolságot. Hasonló szerepet töltenek be a loopok elméletében az un. *nukleuszok*.

**1.2.7. Definíció.** *Az  $(L, \cdot)$  loop bal oldali, középső illetve jobb oldali nukleuszait az alábbi módon értelmezzük.*

$$\begin{aligned} N_\lambda &= \{n \in L; nx \cdot y = n \cdot xy \ \forall x, y \in L\}, \\ N_\mu &= \{n \in L; xn \cdot y = x \cdot ny \ \forall x, y \in L\}, \\ N_\rho &= \{n \in L; xy \cdot n = x \cdot yn \ \forall x, y \in L\}. \end{aligned}$$

*Az  $L$  centruma pedig*

$$C(L) = \{c \in L; cx = xc \ \forall x \in L\}.$$

Az a tény, hogy az így definiált halmazok az  $L$  részcsoportjait alkotják, kiderül a következő állításunkból, de közvetlenül is könnyen leellenőrizhető (ld. [Pfl90, I.3.4. Theorem]). Az is nyilvánvaló, hogy itt karakterisztikus részloopokról<sup>1</sup> van szó. Sajnos azonban a loopok esetén ebből még egyáltalán nem

---

<sup>1</sup>Az  $L$  loop egy  $K$  részloopját *karakterisztikus részloopnak* nevezzük, ha  $L$  minden automorfizmusa invariánsan hagyja  $K$ -t. Mivel a definíciótól következően a nukleuszok asszociatívok, az ő esetükben karakterisztikus részcsopotról beszélhetünk.



következik, hogy ezek normális részloopok lennének, és valóban általában nem is azok. Természetesen

$$Z(L) = N_\lambda \cap N_\mu \cap N_\rho \cap C(L)$$

már normális részloop.

Végül meggondolunk egy fontos kapcsolatot a nukleuszok és a multiplikatív csoportok között (vö. [Gla64, Lemma 8.] bizonyításával).

**1.2.8. Tétel.** *Legyen  $\pi$  az  $L$  halmaz egy tetszőleges permutációja.  $\pi$  pontosan akkor centralizálja az  $(L, \cdot)$  bal oldali eltoláscsoportját, ha  $\pi = \rho_n$ , valamely  $n \in N_\rho$  jobb oldali nukleuszelemre. Analóg állítás teljesül a jobb oldali eltoláscsoport centralizátorára. Végül  $Z(L) \cong Z(M(L))$ .*

*Bizonyítás.* Legyen  $n = \pi(1)$ , ekkor minden  $x \in L$  esetén

$$\pi(x) = \pi(\lambda_x(1)) = \lambda_x(\pi(1)) = xn.$$

Fordítva, definíció szerint  $n \in N_\rho$  pontosan akkor teljesül, ha  $\lambda_x \rho_n = \rho_n \lambda_x$  fennáll. Ez bizonyítja az első állítást, a többi rövid számolással következik.  $\square$

## 1.3. A geometriai nézőpont

Akármilyen meglepően is hangozhat, a loopok és kvázicsoportok vizsgálatát eredendően nem csoportelméleti, hanem geometriai kérdések motiválták, mint pl. a nem Desargues-féle projektív síkok koordinátázása, vagy a differenciálható sokaságokon megadható görbeseregek vizsgálata.

Az alapvető definíció a következő.

**1.3.1. Definíció.** *Legyenek adottak a  $\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{T}$  halmazok,  $\mathcal{P}$  elemeit pontoknak, a  $\mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{T}$  halmazok elemeit pedig rendre függőleges, vízszintes és ferde egyeneseknek nevezzük. A  $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{T})$  négyest 3-hálózatnak nevezzük, ha a pontok és egyenesek között egy illeszkedési reláció van értelmezve úgy, hogy az alábbi axiómák teljesülnek.*

- (i) *Minden  $P \in \mathcal{P}$  pontra mindhárom egyenesosztályból pontosan egy egyenes illeszkedik.*
- (ii) *Bármely két különböző osztályba tartozó egyeneshez pontosan egy pont létezik, amely mindkettőre illeszkedik. Ezt a pontot a két egyenes metszéspontjának vagy közös pontjának hívjuk.*

(iii) *Két azonos osztályba tartozó egyenesnek vagy nincs közös pontja, vagy az egyenesek egybeesnek. Az azonos osztályba tartozó egyeneseket párhuzamosnak is mondjuk.*

A legtermészetesebb példa 3-hálózatra az, ha ponthalmaznak az euklidészi sík pontjait, a három egyenesosztálynak pedig három párhuzamossági osztályt tekintünk. Világos, hogy a koordináta-rendszer megfelelő választásával elérhető, hogy a vízszintesnek illetve függőlegesnek nevezett egyenesek csakugyan a sík  $x$ - ill.  $y$ -tengelyével párhuzamos egyenesek legyenek, a ferde egyenesek pedig a  $-1$  meredekségű párhuzamossági osztály elemei legyenek. Azaz a három egyenesosztály elemei

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{(x = c) | c \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{H} &= \{(y = c) | c \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{T} &= \{(x + y = c) | c \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy ez a példa tetszőleges  $(Q, \cdot)$  kvázicsoport esetére általánosítható. Legyen ugyanis  $\mathcal{P} = Q \times Q$ , az egyenesek pedig

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{(x = c) | c \in Q\}, \\ \mathcal{H} &= \{(y = c) | c \in Q\}, \\ \mathcal{T} &= \{(x \cdot y = c) | c \in Q\}.\end{aligned}$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az egyenletek megoldhatósága garantálja a definícióban megkövetelt illeszkedési axiómákat. (Az illeszkedést természetesen az „elemé” reláció helyettesíti.)

Ennek az eljárásnak a megfordítása az alábbi egyszerű észrevételen múlik.

**1.3.2. Állítás.** *Legyen a  $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{T})$  3-hálózat két rögzített  $\ell_1, \ell_2$  egyenese és legyen  $\mathcal{X}$  egy olyan egyenesosztály, mely sem  $\ell_1$ -et sem  $\ell_2$ -t nem tartalmazza. Ekkor az  $\mathcal{X}$  irányú párhuzamos vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést definiál a két egyenesre illeszkedő pontok halmazai között.*

*Következésképp bármely két egyenes ponthalmaza azonos számosságú, és ez a számosság megegyezik a három egyenesosztály számosságával. Ezt a számosságot a 3-hálózat rendjének nevezzük.*

Legyen most adott egy  $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{T})$  3-hálózat, és rögzítsünk egy  $Q$  halmazt, melynek számossága megegyezik a 3-hálózat rendjével. Ekkor a fentiek szerint a három egyenesosztály elemeit megindexelhetjük a  $Q$  elemeivel. Így a  $Q$  halmazon bevezethetünk egy kvázicsoporthműveletet az alábbi módon. Tetszőleges  $x, y \in Q$  esetén jelölje  $P_{x,y}$  az  $x$ -szel indexelt függőleges és az  $y$ -nal indexelt vízszintes egyenes metszéspontját. Legyen  $z$  a  $P_{x,y}$ -ra illeszkedő ferde egyenes indexe és definiáljuk a szorzásműveletet  $x \cdot y = z$ -ként.

Felmerül persze a kérdés, hogy a most definiált kvázicsoport milyen mértékben van egyértelműen meghatározva a 3-hálózat által, hisz az egyenesek indexelése tetszőlegesen történt. Tegyük ezért fel, hogy  $(R, *)$  egy másik kvázicsoport, mely ugyanabból a 3-hálózatból adódik. Ekkor pl. a függőleges egyenesek egyaránt indexeltek a  $Q$  és az  $R$  elemeivel, ez definiál egy  $\alpha : Q \rightarrow R$  bijekciót. Hasonlóan, a vízszintes és a ferde egyenesek indexelése további  $\beta, \gamma : Q \rightarrow R$  bijekciókat határoznak meg. Az előbbi gondolatmenet jelöléseit használva megállapíthatjuk, hogy az  $(R$  szerinti indexelésben)  $\alpha(x)$ -hez tartozó függőleges,  $\beta(y)$ -hoz tartozó vízszintes és  $\gamma(z)$ -hez tartozó ferde egyenesek is egy ponton mennek át. Azaz  $\alpha(x) * \beta(y) = \gamma(z)$ , vagy általánosabban

$$\alpha(x) * \beta(y) = \gamma(x \cdot y) \quad (1.1)$$

teljesül minden  $x, y \in Q$  esetén.

**1.3.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $(Q, \cdot)$  és az  $(R, *)$  kvázicsoportok izotópok, ha létezik három  $\alpha, \beta, \gamma : Q \rightarrow R$  bijektív leképezés, amelyek kielégítik az (1.1) egyenlőséget. Ekkor az  $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  hármast izotópiizmusnak, magát a jelenséget pedig izotópiának hívjuk.

Nyilvánvaló, hogy az izotópia ekvivalenciareláció. Mindezekből adódik az alábbi állítás.

**1.3.4. Állítás.** Minden kvázicsoporthoz egyértelmű módon hozzá tudunk rendelni egy 3-hálózatot. Minden 3-hálózathoz hozzárendelhetünk egy kvázicsoportot, itt azonban a hozzárendelés már nem lesz egyértelmű. Igaz viszont, hogy két kvázicsoporthoz akkor és csak akkor rendelhetünk izomorf 3-hálózatokat, ha azok izotópok.

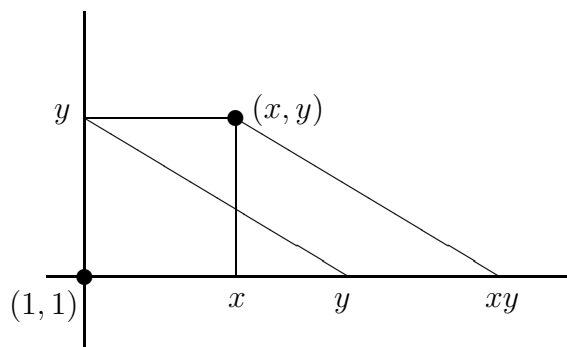
*Megjegyzés.* A  $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{T})$  és  $(\mathcal{P}', \mathcal{V}', \mathcal{H}', \mathcal{T}')$  3-hálózatokat akkor tekinthetjük izomorfoknak, ha léteznek bijektív  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ ,  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ,  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  illeszkedéstartó megfeleltetések. Az ilyen megfeleltetést *iránytartó kollineációnak*<sup>2</sup> fogjuk hívni.

A konstrukció tovább egyszerűsödik, ha a 3-hálózat koordinátázását egy  $(L, \cdot)$  looppal akarjuk végezni. Mint látni fogjuk, ez egyenértékű egy speciális pontnak, az origónak a kiválasztásával.

Tegyük ugyanis fel, hogy a koordinátázó kvázicsoport loop, és vizsgáljuk meg az  $O = (1, 1)$  pontra illeszkedő függőleges és vízszintes egyeneseket. Azt találjuk, hogy a ferde vetítés természetes módon megfelelteti egymásnak a két „tengely” pontjait, mivel definíció szerint az  $P_{1,x}$  és  $P_{x,1}$  pontok közös ferde egyenesre illeszkednek.

---

<sup>2</sup>Nem iránytartó kollineáció alatt természetesen egy pontot pontra, egyenest egyenesre képező illeszkedéstartó leképezést értünk.



1.1. ábra. A loopművelet geometriai definíciója.

Fordítva, ha rögzítünk egy tetszőleges  $O$  origót a 3-hálózatban, akkor a függőleges egyenesek indexelése már egyértelműen meghatározza a másik két osztály indexelését: megköveteljük, hogy az azonos elemmel indexelt függőleges és ferde egyenesek a vízszintes tengelyen, a vízszintes és ferde egyenesek a függőleges tengelyen messék egymást. Ez ekvivalens azzal, hogy az origó koordinátája  $(1, 1)$  alakú és 1 a koordináta kvázicsoport egységeleme.

Az 1.1. ábra mutatja, hogy ebben az esetben hogyan értelmezhető geometriailag az  $x$ -tengelyen (=az origóra illeszkedő vízszintes egyenesen) a loopművelet. A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy a szóbanforgó 3-hálózatot looppal koordinátázzuk.

Mielőtt leszűrnénk az imént meggondolt tények néhány algebrai jellegű következményét, definiáljuk a *főizotópia* fogalmát.

**1.3.5. Definíció.** Az  $\langle \alpha, \beta, id \rangle$  alakú izotopizmusokat főizotopizmusnak nevezzük.

A fenti geometriai meggondolások algebrai megfogalmazása a következő.

**1.3.6. Állítás.** Minden kvázicsoportnak van loopizotópja. Ha az  $(L, \circ)$  és  $(M, *)$  loopok izotópok, akkor létezik egy, az  $(L, \circ)$  loophoz izomorf  $(M, \bullet)$  loop, amely az  $(M, *)$  loophoz főizotóp. Azaz izomorfia erejéig minden izotópia helyettesíthető főizotópiával.

*Bizonyítás.* Az első állítás egyszerűen azt mondja, hogy minden 3-hálózat koordinátázható looppal. A második állítás is nyilvánvalóvá válik, ha meggondoljuk, hogy geometriai szempontból mit is jelent a főizotópia: adott a  $Q$  alaphalmaz és az egyenesosztályok két különböző indexelése a  $Q$  elemeivel, ahol azonban a ferde egyeneseket azonos módon indexeltük.

Most úgy kell definiálnunk az  $(M, \bullet)$  loopot, hogy a fenti feltételek teljesüljenek. Ehhez a ferde egyenesek indexelése  $(M, \bullet)$  szerint egyezzen meg az  $(M, *)$  szerinti indexeléssel. Mivel a ferde egyenesek a  $(L, \circ)$  szerint is meg

vannak indexelve, ezért ez definiál egy  $\varphi : L \rightarrow M$  kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. A függőleges és vízszintes egyenesek  $(M, \bullet)$  szerinti indexelését definiáljuk mint az  $(L, \circ)$  szerinti indexelés  $\varphi$ -vel való konjugáltját. Ekkor  $\varphi : L \rightarrow M$  egy izomorfíát ad meg, a fentebb elmondottak szerint az  $(M, *)$  és  $(M, \bullet)$  loopok pedig főizotópok lesznek.  $\square$

*Megjegyzés.* A bizonyítás gondolatmenetében nem használtuk ki, hogy a kiindulási  $(L, \circ)$  és  $(M, *)$  kvázicsoportok loopok, tehát a tétel állítása kvázicsoportok esetén igaz marad. Nyilván  $(M, \bullet)$  pontosan akkor lesz loop, ha  $(L, \circ)$  loop.

Mint azt a következő állítás mutatja, a főizotóppal történő számolás loopok esetében nagyfokú egyszerűsítést tesz lehetővé.

**1.3.7. Állítás.** *Legyen  $(L, *)$  az  $(L, \cdot) = (L, \cdot, /, \backslash)$  loop főizotóp loopja. Ekkor léteznek  $a, b \in L$  elemek úgy, hogy minden  $x, y \in L$  esetében*

$$x * y = x/b \cdot a \backslash y$$

*áll fenn. Minden  $x, y \in L$  esetén teljesül továbbá*

$$\lambda_x^* = \lambda_{x/b} \lambda_a^{-1}, \quad \rho_y^* = \rho_{a \backslash y} \rho_b^{-1},$$

*ahol  $\lambda_x, \rho_y$  az  $(L, \cdot)$ ,  $\lambda_x^*, \rho_y^*$  pedig az  $(L, *)$  loopok eltolásai.*

*Bizonyítás.* A feltételek szerint  $x * y = \alpha(x) \cdot \beta(y)$ . Legyen  $e$  az  $(L, *)$  egységeleme, és definiáljuk az  $a = \alpha(e)$  és  $b = \beta(e)$  elemeket.  $\square$

## 1.4. Kollineációk

Most megvizsgáljuk azokat az algebrai eszközöket, amelyekkel 3-hálózatok kollineációit le tudjuk írni.

**1.4.1. Definíció.** *Rögzítsünk egy tetszőleges  $(L, \cdot)$  loopot. Az  $(L, \cdot)$  loop önmagával vett izotopizmusait autotopizmusnak nevezzük, azaz a  $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  hármassnak minden  $x, y \in L$  esetén teljesítenie kell az*

$$\alpha(x) \cdot \beta(y) = \gamma(x \cdot y)$$

*feltételt.*

Legyen  $a = \alpha(1)$  és  $b = \beta(1)$ . Ekkor az  $x = 1$  és  $y = 1$  helyettesítéssel  $a \cdot \beta(y) = \gamma(y)$  és  $\alpha(x) \cdot b = \gamma(x)$  adódik, azaz  $\gamma = \lambda_a \beta = \rho_b \alpha$ , vagyis az  $\alpha$  és  $\beta$  leképezések már egyértelműen meghatározzák  $\gamma$ -t. A következő állítás szerint az  $(\alpha, \beta)$  párnak konkrét geometriai jelentés adható.

**1.4.2. Állítás.** Legyen  $(L, \cdot)$  a  $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{T})$  3-hálózat koordinátaloopja. Legyenek  $\alpha, \beta : L \rightarrow L$  invertálható leképezések. Ekkor az

$$(x, y) \mapsto (\alpha(x), \beta(y))$$

leképezés akkor és csak akkor lesz a 3-hálózat iránytartó kollineációja, ha létezik egy  $\gamma : L \rightarrow L$  invertálható leképezés úgy, hogy az  $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  hármas az  $(L, \cdot)$  loop autotopizmusa. Ekkor  $\gamma = \lambda_a \beta = \rho_b \alpha$ . A  $\gamma$  leképezés geometriai jelentése az  $(\alpha, \beta)$  kollineáció hatása a ferde egyenesosztályon.

*Bizonyítás.* Nyilvánvaló módon csak azt kell vizsgálnunk, hogy az  $(\alpha, \beta)$  leképezés megtartja-e a ferde egyenseket. Ehhez pedig elegendő meggondolnunk, hogy minden  $x, y \in L$  esetén az  $(1, xy)$ ,  $(x, y)$  és  $(xy, 1)$  pontok képei azonos ferde egyenesre illeszkednek:

$$a \cdot \beta(xy) = \alpha(x)\beta(y) = \alpha(xy) \cdot b,$$

amiből  $\lambda_a \beta = \rho_b \alpha$  következik. A  $\gamma = \lambda_a \beta = \rho_b \alpha$  helyettesítéssel viszont az egyenlet

$$\alpha(x)\beta(y) = \gamma(xy),$$

alakúra változik, ami ekvivalens azzal, hogy az  $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  hármas autotopizmus, és az utolsó állítás is adódik.  $\square$

Érdeemes megvizsgálni azt az esetet, amikor az  $(\alpha, \beta)$  kollineáció rögzíti az  $y$ -tengelyt. Ekkor, a fenti jelöléssel  $a = \alpha(1) = 1$  és  $\gamma = \beta = \rho_b \alpha$ . Azaz  $\alpha$  és  $b = \beta(1)$  egyértelműen meghatározza a kollineációt, amelyhez az

$$\langle \alpha, \rho_b \alpha, \rho_b \alpha \rangle$$

alakú autotopizmus tartozik. Definíció szerint ez azt jelenti, hogy teljesül az

$$\alpha(x) \cdot (\alpha(y) \cdot b) = \alpha(xy) \cdot b \tag{1.2}$$

azonosság. Eszerint  $\alpha$  majdnem automorfizmus, csak az asszociativitás hiánya rontja el a dolgot. Adódik viszont a következő definíció.

**1.4.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy  $\alpha$  az  $(L, \cdot)$  loop jobb oldali pseudo-automorfizmusa  $b$  kísérőelemmel, ha minden  $x, y \in L$  elempár esetén teljesül a (1.2) egyenlőség. Analóg módon beszélhetünk bal oldali pseudo-automorfizmusról is.

Ezen alfejezet hátralevő részében néhány, a kollineációkhoz kapcsolódó fontos tulajdonságot és tételt tárgyalunk.

**1.4.4. Állítás.** *Legyen  $P$  és  $Q$  egy tetszőleges 3-hálózat két pontja és legyenek  $(L, \cdot)$  illetve  $(L, *)$  a  $P$  illetve  $Q$  origójú koordinátaloopok. A két loop akkor és csak akkor izomorf, ha létezik a 3-hálózatnak olyan iránytartó kollineációja, amely a  $P$ -t a  $Q$ -ba képezi.*

*Bizonyítás.* Ha létezik egy  $P \mapsto Q$  kollineáció, az meghatároz egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a  $P$ -re illetve  $Q$ -ra illeszkedő vízszintes tengelyek között, ami az  $L$ -nek egy permutációját jelenti. Ez a szorzás geometriai definíciója szerint izomorfizmus.

Fordítva, ha  $\varphi : (L, \cdot) \rightarrow (L, *)$  izomorfizmus, akkor definiáljuk a kollineációt az alábbi módon: a  $P$  origójú koordinátarendszerben  $(x, y)$  koordinátákkal rendelkező  $R$  pont képe legyen a  $Q$  origójú rendszerben  $(\varphi(x), \varphi(y))$  koordinátájú  $R'$  pont. Az  $R \mapsto R'$  megfeleltetés a 3-hálózat iránytartó kollineációja, amely  $P$ -t  $Q$ -ba képezi.  $\square$

*Megjegyzés.*  $G$ -loopnak nevezzük azokat a loopokat, amelyek izomorfak minden izotópjukhoz. Az előző állítás szerint  $(L, \cdot)$  akkor és csak akkor  $G$ -loop, ha a loophoz tartozó 3-hálózat iránytartó kollineációinak csoportja tranzitívan hat a ponthalmazon. A következő állításból a terminológia megválasztására is magyarázatot kapunk.

Legyen  $\mathcal{N}$  az  $(L, \cdot)$  loophoz tartozó 3-hálózat, és minden  $c, d \in L$  elempár esetére definiáljuk a pontok egy leképezését:

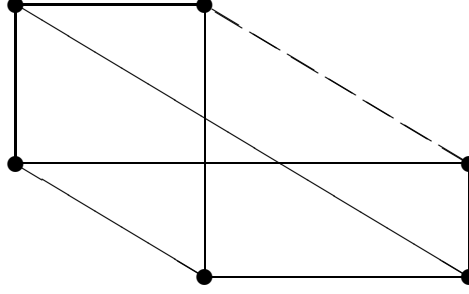
$$T_{(c,d)} : (x, y) \mapsto (cx, yd).$$

**1.4.5. Állítás.** *Az  $(L, \cdot)$  loop akkor és csak akkor csoport, ha minden  $c, d \in L$  esetén  $T_{(c,d)}$  kollineáció. Ebben az esetben a  $T_{(c,d)}$  alakú leképezések egy  $L \times L$ -vel izomorf csoportot alkotnak, mely szigorúan tranzitívan hat a 3-hálózat ponthalmazán.*

*Bizonyítás.* Az első kijelentés könnyen leellenőrizhető az 1.4.2 állítás alapján. A második megállapítás is adódik, ha az izomorfizmust a  $(c, d) \mapsto T_{(c,d^{-1})}$  megfeleltetéssel definiáljuk.  $\square$

Végül egy egyszerű példán keresztül megmutatjuk, hogy bizonyos esetekben a 3-hálózat szimmetriacsoportjának tulajdonságaiból következtethetünk a koordinátaloop belső struktúrájára. Az ilyen tárgyalásmódot FELIX KLEIN Erlangeni Programjával való analógiája miatt *Klein-féle megközelítésnek* is nevezik.

**1.4.6. Tétel (Barlotti, Strambach, [BS83]).** *Az  $(L, \cdot)$  looppal koordinátázott  $\mathcal{N}$  3-hálózatnak akkor és csak akkor létezik pont-tranzitív Abel-féle iránytartó kollineációcsoportja, ha  $L$  Abel-csoport.*



1.2. ábra. A kommutativitást jellemző Thomsen-konfiguráció.

*Bizonyítás.* Az ‘akkor’ irány rögtön adódik az 1.4.5 állításból. Legyen most  $A$  egy Abel-féle pont-tranzitív kollineációcsoport. Nyilván a különböző vízszintes egyenesekhez tartozó stabilizátor részcsoportok konjugáltak egymáshoz  $A$ -ban. Ez csak úgy lehetséges, ha az  $x$ -tengely  $A_x$  stabilizátora az összes vízszintes egyenest fixen hagyja. Így  $A_x$  elemei mind  $(\alpha, id)$  alakúak. Az 1.4.2 állítás szerint  $\lambda_a \beta = \rho_b \alpha$ , itt azonban  $\beta = id$ ,  $b = 1$ , azaz  $\alpha = \gamma = \lambda_a$ . Továbbá  $\langle \lambda_a, id, \lambda_a \rangle$  autotopizmus, azaz

$$ax \cdot y = a \cdot xy.$$

Viszont  $A$  pont-tranzitivitása miatt minden  $a \in L$  elemhez létezik  $(\alpha, id) \in A_x$  kollineáció, amelyre  $a = \alpha(1)$ , tehát  $L$  csoport. Végül, az  $a \mapsto (\lambda_a, id)$  izomorfizmus az  $L$  loop és az  $A_x$  Abel-csoport között.  $\square$

## 1.5. Univerzális tulajdonságok, konfigurációk

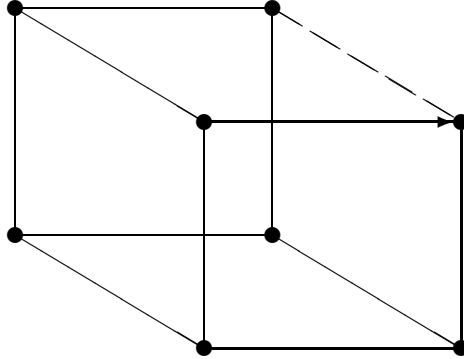
Ebben a fejezetben azokat a tulajdonságokat fogjuk vizsgálni, amelyek a 3-hálózat geometriai (koordinátamentes) jellemzőit írják le.

**1.5.1. Definíció.** Legyen  $P$  egy loopokra (kvázicsoportokra) jellemző tulajdonság. Azt mondjuk, hogy az  $(L, \cdot)$  loop (kvázicsoport) rendelkezik a  $P$  univerzális változatával, ha  $(L, \cdot)$ -lel együtt minden izotópja rendelkezik  $P$ -vel. A  $P$ -t univerzális tulajdonságnak nevezzük, ha a  $P$ -vel rendelkező loopok (kvázicsoportok) osztálya zárt az izotópizmusra.

Az alábbi klasszikus eredmények egyszerű geometriai okfejtéssel is beláthatók.

- 1.5.2. Állítás.** (i) Az asszociativitás univerzális tulajdonság.  
(ii) Minden univerzálisan kommutatív loop Abel-csoport.





1.3. ábra. Az asszociativitást jellemző Reidemeister-konfiguráció.

*Bizonyítás.* Ld. a [Pff90, II.3.1. és II.3.4. tételek]-et, valamint az 1.4.5 állítás.  $\square$

Vegyük észre, hogy egy loopművelet segítségével felírt egyenlőség a 3-hálózatban mindig egy záródási konfigurációval írható le. Az univerzális kommutativitásnak a Thomsen-konfiguráció, míg az asszociativitásnak a Reidemeister-konfiguráció néven ismert alakzatok felelnek meg a 3-hálózatban, lásd az 1.2. és 1.3. ábrákat. (Vö. [Pff90, II.3. fejezet].)

Az ilyen záródási alakzatok számos esetben a 3-hálózat egy kollineációjának is megfelelnek. A Reidemeister-konfiguráció például pontosan azt írja le, hogy az ábrán vastag nyíllal jelölt vízszintes irányú eltolás illeszkedéstartó. Persze ebben az alakzatban a vízszintes irány nincs kitüntetett helyzetben, ugyanúgy beszélhetnénk függőleges vagy ferde irányú eltolásokról.

A fejezetet a nukleuszok geometriai jellemzésével zárjuk. Ebből rögtön fog adódni, hogy a loop nukleuszai izotópiainvariánsok, vagyis izotóp loopok megfelelő nukleuszai izomorfak.

Legyen  $(L, \cdot)$  egy loop  $N_\lambda$  bal oldali nukleusszal,  $n \in N_\lambda$  rögzített nukleuszalelem. Az  $nx \cdot y = n \cdot xy$  azonosságot úgy is kifejezhetjük, hogy az mondjuk, hogy a  $\langle \lambda_n, id, \lambda_n \rangle$  hármas autotopizmus. Az 1.4.2 állítás szerint ez ekvivalens azzal, hogy a  $(\lambda_n, id)$  pár az  $L$ -hez tartozó 3-hálózat kollineációjára.

Fordítva, tekintsünk egy  $(\pi, id)$  alakú kollineációt. A 1.4.2 állítás szerint ekkor  $\langle \pi, id, \gamma \rangle$  autotopizmus, ahol  $\gamma = \lambda_n = \pi$ ,  $n = \pi(1)$ . Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy  $n \in N_\lambda$  bal oldali nukleuszalelem. Ezt az észrevételt az 1.2.8 tétellel együtt az alábbi módon foglalhatjuk össze.

**1.5.3. Tétel.** *Létezik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a bal oldali nukleusz elemeihez tartozó*

$$\{\lambda_n; n \in N_\lambda\}$$

*baleltolások, a jobb oldali eltoláscsoport*

$$C_{M(L)}(G_{\text{jobb}}(L)) = \{\lambda_n; n \in N_\lambda\}$$

*centralizátora és az összes vízszintes egyenest rögzítő*

$$\{(\lambda_n, id); n \in N_\lambda\}$$

*kollineációk csoportja között.      □*

## 2. fejezet

# Bol-loopok

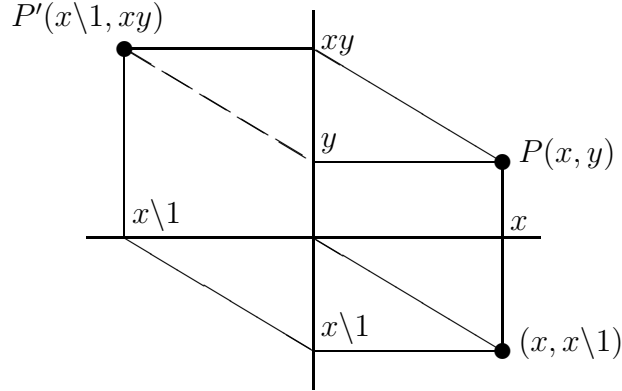
Ebben a fejezetben olyan speciális looposztályokat vizsgálunk, amelyekben az asszociativitás bizonyos gyenge formái vannak jelen. Ezek közül a „legerősebbnek”, azaz a csoportokhoz legközelebb állóaknak a *Moufang-loopok* osztályát tekinthetjük, amire a klasszikus példa az *oktávok*, vagy más néven a *Cayley-számok* multiplikatív struktúrája. A mi tárgyalásunkban a *Bol-loopok* a Moufang-loopok természetes általánosításai, pontosabban a Moufang-loopokat mint a Bol-loopok speciális esetét fogjuk tekinteni.

A 2.1 alfejezetben a Bol-loopok és a hozzájuk tartozó 3-hálózatok a szakirodalomból általánosan ismert tulajdonságait tárgyaljuk. A következő 2.2 alfejezetben a disszertáció egyik alapfogalmát, a *Bol-tükrözéseket*, illetve a hozzájuk kapcsolódó *szív* fogalmát definiáljuk. A 2.2.1 állítás és a 2.2.2 tétel [FN93]-ből, a 2.2.4 állítás pedig V.D. BELOUSOV [Bel65] és D.A. ROBINSON [Rob66] cikkeiben szerepel.

A 2.3 alfejezet 2.3.3, 2.3.5 és 2.3.6 tételei saját publikálatlan eredményeink, jóllehet a 2.3.4 következmény más bizonyítással [Rob66]-ban is szerepel.

R.H. BRUCK nagyszerű [Bru58] munkájában már foglalkozik Moufang-loopok szívével és a hozzájuk társított *B-loopok*kal. A Bol-loopok osztályán a szív fogalmát elsőként [Bel65]-ban vizsgálták. A 2.3.1 állítás mindkét esetre ismert, ld. [Bru58, VII. Theorem 5.2.] és [Bel65].

A 2.3.7 állítás más módszerrel és jóval bővebben tárgyalva van a [Gla64, Theorem 4]-ben és az azt követő Corollary-ban. Az általunk megfogalmazott eredményt bizonyítják [NS98, Theorem 3.8]-ben megint csak egy teljesen más összefüggésben, analitikus *B-loopok*ra, az érintő algebra fogalmának felhasználásával. A 2.3.8 állítás a [Bru58, VII. Theorem 5.3. és Lemma 5.3.]-al állítható párhuzamba, de annál erősebb, hisz gyengébb feltételből (Moufang-loop helyett Bol-loop) indul ki. Némileg más formában pedig szerepel a [NS98, Theorem 3.8.]-ben is.



2.1. ábra. A bal inverz tulajdonság.

A 2.4 alfejezet minden eredménye G. GLAUBERMAN [Gla64, Gla68, Gla66] munkáiból következik, a jelen bemutatásban az újdonság a megközelítésben van, ami leginkább a 2.4.5 tételben mutatkozik meg.

## 2.1. Definíciók

A Bol-tulajdonság többféle módon definiálható. Mi azt az utat választjuk, melyből azonnal kitűnik a tulajdonság univerzális volta.

**2.1.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $(L, \cdot)$  loop rendelkezik a bal inverz tulajdonsággal, ha minden  $x \in L$  elemhez létezik egy  $x' \in L$  úgy, hogy minden  $y \in L$  esetén teljesül

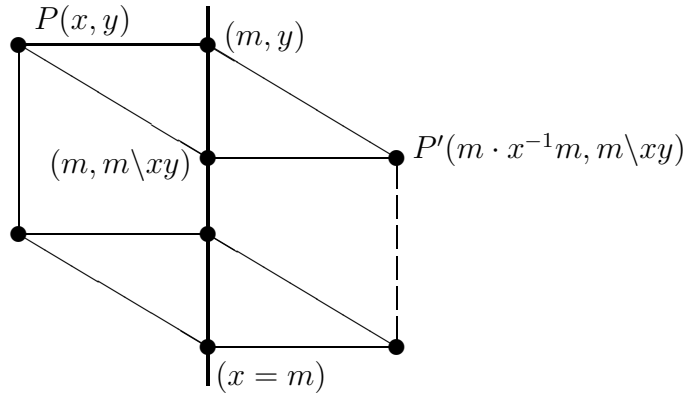
$$x' \cdot (xy) = y.$$

Az  $x'$  elemet az  $x$  bal oldali inverzének nevezzük, és  $x^{-1}$ -el jelöljük. Az  $(L, \cdot)$  loopot (bal oldali) Bol-loopnak nevezzük, ha univerzális bal inverz tulajdonságú, azaz minden izotópja rendelkezik a bal inverz tulajdonsággal.

A 2.1. ábra mutatja a bal inverz tulajdonság geometriai jelentését. Ha az  $x^{-1}$  elem létezik, akkor  $x^{-1}x = 1$  és  $x^{-1} \cdot xx^{-1} = x^{-1}$ , ami egyszerűsítve  $xx^{-1} = 1$ -et ad. Ekkor tehát  $x^{-1} = x\1 = 1/x$  áll fent.

Az ábrából rögtön adódik, hogy a bal inverz tulajdonsághoz kapcsolódó záródási konfiguráció szintén felfogható, mint egy (nem iránytartó) kollineáció. A  $P \mapsto P'$  leképezést megadhatjuk, mint egy  $y$ -tengelyre vett tükrözést.

**2.1.2. Definíció.** Legyen  $\ell$  egy  $\mathcal{N}$  3-hálózat rögzített függőleges egyenese. Az  $\ell$  egyenesre vett Bol-tükrözésnek nevezzük az  $\mathcal{N}$  ponthalmazának alábbi leképezését: a  $P$ -ből vízszintes illetve ferde egyenest bocsátunk az  $y$ -tengelyre, a metszéspontokban vett ferde illetve vízszintes egyenesek metszéspontja adja a  $P'$  képet.



2.2. ábra. A Bol-konfiguráció és Bol-tükrözés.

Ez a tükrözés ferde egyenest minden esetben vízszintes egyenesre képez, és fordítva, de a függőleges egyeneseket csak speciális esetekben tartja meg. Ha a tengely megegyezik az  $y$ -tengellyel, akkor ez a speciális feltétel pont a bal inverz tulajdonság.

Ezek szerint a Bol-tulajdonság, ami a bal inverz tulajdonság univerzális változata, ekvivalens azzal, hogy a 3-hálózat minden függőleges egyenesére tudunk tükrözni, vagy másképp mondva, a 2.2. ábrán látható alakzat mindig záródik. Az  $x = m$  függőleges egyenesre, mint tengelyre vett Bol-tükrözést  $\sigma_m$ -mel fogjuk jelölni:

$$\sigma_m : (x, y) \mapsto (m \cdot x^{-1}m, m \setminus xy). \quad (2.1)$$

A bal inverz és a Bol-tulajdonság algebrai megfogalmazása a következő. A bal inverz tulajdonság valójában azt mondja, hogy minden  $x \in L$  esetén

$$\lambda_x^{-1} = \lambda_{x^{-1}}$$

teljesül. Ez egyenértékű azzal, hogy  $\lambda_x^{-1} \in S(L)$  bármely  $x \in L$  elemre. Az 1.3.7 állítás szerint  $(L, \cdot)$  főizotópjainak bal eltolásai

$$S(L)^* = S(L)\lambda_a^{-1} = \{\lambda_x \lambda_a^{-1} | x \in L\}$$

alakúak, a bal inverz tulajdonság ebben az izotópban

$$\lambda_a \lambda_x^{-1} = (\lambda_x \lambda_a^{-1})^{-1} \in S(L)\lambda_a^{-1}$$

alakú, ami a

$$\lambda_a \lambda_x^{-1} \lambda_a \in S(L) \quad (2.2)$$

egyenlőséggel ekvivalens, és aminek minden  $a, x \in L$  elemre teljesülnie kell. Az eredeti  $(L, \cdot)$  loop bal inverz tulajdonsága miatt (2.2) egyenértékű a

$$\lambda_x \lambda_y \lambda_x \in S(L) \quad \forall x, y \in L$$

egyenlőséggel. Ha viszont  $\lambda_x \lambda_y \lambda_x = \lambda_z$  valamilyen  $z \in L$  elemre, akkor mindkét oldalt az egységelemre alkalmazva kapjuk, hogy  $z = x \cdot yx$ . A  $\lambda_x \lambda_y \lambda_x = \lambda_{x \cdot yx}$  egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges  $z$  elemre alkalmazva, az

$$x \cdot (y \cdot xz) = (x \cdot yx) \cdot z \quad (2.3)$$

azonosságot kapjuk.

Fordítva, a (2.3) azonosság ekvivalens a  $\lambda_x \lambda_y \lambda_x \in S(L)$  tartalmazással. Az  $y = 1/x$  választással elérhetjük, hogy  $x \cdot yx = x$  teljesüljön, azaz  $\lambda_x \lambda_{1/x} \lambda_x = \lambda_x$ . Ebből viszont rögtön adódik  $\lambda_x^{-1} = \lambda_{1/x} \in S(L)$ , azaz (2.2) teljesül. Az pedig ekvivalens azzal, hogy  $(L, \cdot)$  minden izotópja bal inverz tulajdonságú. Beláttuk tehát a következő állítást

**2.1.3. Állítás.** *Az  $(L, \cdot)$  loopra az alábbiak ekvivalensek.*

- (i)  $(L, \cdot)$  Bol-loop, azaz minden loopizotópja bal inverz tulajdonságú.
- (ii) A loopban teljesül a (2.3) azonosság.
- (iii) A loophoz tartozó 3-hálózatban záródik a 2.2. ábrán látható ú.n. Bol-konfiguráció.

Mint dolgozatunk elején említettük, loopoknál általában az elemek rendjéről sem beszélhetünk. Most megmutatjuk, hogy ez a probléma Bol-loopok esetében nem lép fel. A fentiek szerint ugyanis a Bol-tulajdonság egyik megfogalmazása a  $\lambda_x \lambda_y \lambda_x \in S(L)$  azonosság. Az  $y = 1$  illetve  $y = x$  helyettesítésekkel  $\lambda_x^2 \in S(L)$  illetve  $\lambda_x^3 \in S(L)$ , majd indukcióval folytatva  $\lambda_x^k \in S(L)$  adódik ( $k \in \mathbb{N}$ ). Mivel már láttuk, hogy  $\lambda_x^{-1} \in S(L)$ , kapjuk, hogy

$$\lambda_x^k \in S(L), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ez azt jelenti, hogy  $x$  és  $x^{-1}$  egy asszociatív-kommutatív részloopot generál, és  $L$  hatvány-asszociatív, azaz  $x$  hatványai egyértelműen meghatározottak. Így az  $x$  elem rendjéről is van értelme beszélünk, ami megegyezik a  $\lambda_x$  csoportelem rendjével.

Tegyük most fel, hogy valamely  $k > 0$  szám esetén  $\lambda_x^k$ -nak van egy  $y$  fixpontja. Ez azt jelenti, hogy  $x^k \cdot y = y$ , azaz  $\lambda_x^k = id$ , vagyis  $\lambda_x$  azonos hosszúságú ciklusokba rendezi az  $L$  elemeket. Következésképp, ha  $|L|$  véges, akkor  $\lambda_x$ , azaz  $x$  rendje osztja  $|L|$ -et. Ezzel beláttuk a következő állítást (vö. [Bur78]).

**2.1.4. Állítás.** *A Bol-loopok hatványasszociatívak. Véges Bol-loop esetén minden elem rendje osztja a loop rendjét.  $\square$*

## 2.2. Bol-tükrözések, a Bol-loop szíve

Ezen fejezettől fogva  $(L, \cdot)$  egy (bal oldali) Bol-loopot fog jelölni.

Az (2.1) képlet szerint a  $\sigma_m$  tükrözés az  $(x, y)$  pontot az  $(m \cdot x^{-1}m, m \setminus xy)$  pontba képezi. Speciális esetként  $\sigma_1 : (x, y) \mapsto (x^{-1}, xy)$ , amiből

$$\sigma_m \sigma_1 : (x, y) \mapsto (m \cdot xm, m \setminus y),$$

azaz

$$\sigma_m \sigma_1 = (\lambda_m \rho_m, \lambda_m^{-1}) \quad (2.4)$$

adódik.

**2.2.1. Állítás.** *Definiáljuk az*

$$N = \langle \sigma_x; x \in L \rangle, \quad N_0 = \langle \sigma_x \sigma_1; x \in L \rangle$$

*kollineációcsoportokat. Ekkor  $N_0$  iránytartó kollineációcsoport, az  $N$  csoport egy 2 indexű részcsoportja.  $N$ -et és  $N_0$ -at normalizálja az összes iránytartó kollineáció. Az  $N$  csoport nem iránytartó, a ferde és a vízszintes irányokat felcseréli.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\varphi$  egy olyan kollineáció, amely a függőleges irányt megtartja. Ekkor  $\varphi \sigma_m \varphi^{-1} = \sigma_{m'}$ , ahol az  $(x = m)$  tengely  $\varphi$  melletti képének egyenlete  $(x = m')$ . Eszerint minden  $\sigma_x \sigma_y$  szorzat írható  $\sigma_x \sigma_1 \sigma_{y'} \sigma_1$  alakban, azaz  $N_0$  elemei pontosan a páros sok Bol-tükrözés szorzataként előálló kollineációk, azaz  $N = N_0 \cup N_0 \sigma_1$  és  $|N : N_0| = 2$ . A többi állítás triviálisan adódik.  $\square$

A (2.4) képlet azt mondja, hogy az  $N_0$  csoport elemei úgy hatnak a vízszintes egyenesek halmazán, ahogy a  $G_{\text{bal}}(L)$  eltoláscsoport hat a loop tartó halmazán. Ezt fejezi ki pontosan a következő tétel.

**2.2.2. Tétel (M. Funk, Nagy P.T.).** *A*

$$\Phi : \sigma_x \sigma_1 \mapsto \lambda_x^{-1}$$

*generátor elemeken definiált leképezés egyértelműen kiterjeszhető egy szintén  $\Phi$ -vel jelölt  $N_0 \rightarrow G_{\text{bal}}$  szürjektív homomorfizmussá, melynek magja a koordinátaloo bal oldali nukleuszának egy részcsoportjával izomorf.*

*Bizonyítás.* Lásd [FN93, Theorem 3.1.].  $\square$

**2.2.3. Definíció.** *Az  $L$  halmazon definiáljuk az*

$$x + y = x \cdot y^{-1}x$$

*műveletet. Az így definiált  $(L, +)$  grupoidot az  $L$  Bol-loop szívének nevezzük.*

A szívnek geometriai jelentést is adhatunk, amiből azonnal következik a fogalom izotóp-invarienciája (ld. [Rob66]). A (2.1) képlet szerint ugyanis  $\sigma_m$  az  $x \in L$  elemmel indexelt függőleges egyenest az  $m + x$  elemmel indexelt egyenesbe képezi. A konjugálás szabályai alapján

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_x = \sigma_{x+y}.$$

A szívet tehát a Bol-tükrözések  $\Sigma = \{\sigma_x | x \in L\}$  halmazán is definiálhatom, a konjugálással mint művelettel:

$$\sigma_x \oplus \sigma_y = \sigma_x \sigma_y \sigma_x.$$

Ezzel beláttuk a következő állításunk első részét.

**2.2.4. Állítás.** *A Bol-loophoz rendelt szív izotóp-invariáns, azaz az izotóp loopokhoz rendelt szívek izomorfak. Ezen kívül a szív eleget tesz az alábbi azonosságoknak:*

- (1)  $x + x = x$ ;
- (2)  $x + (x + y) = y$ ;
- (3)  $x + (y + z) = (x + y) + (x + z)$ .

*Bizonyítás.* A konjugálás útján definiált művelet segítségével a szükséges számolás egyszerűen adódik.  $\square$

## 2.3. B-loopok

A következőkben egy olyan looposztályt vizsgálunk, amelynél a szív közvetlenül tartalmazza a loop teljes struktúráját. Ehhez az első lépést az alábbi egyszerű észrevétel szolgáltatja.

**2.3.1. Állítás.** *Az  $(L, \cdot)$  Bol-loop  $(L, +)$  szíve akkor és csak akkor kvázicsoport, ha a loopban az  $x \mapsto x^2$  művelet bijektív. Véges loop esetében ez ekvivalens azzal, hogy a loop  $|L|$  rendje páratlan.*

*Bizonyítás.* A feltétel szükségessége nyilvánvaló, hisz  $x^2 = r_1(x)$ , ahol  $r_y$  jelöli az  $x \mapsto x + y$  szívbeli eltolást. Az  $a + y = b$  alakú egyenlet megoldása a 2.2.4 állítás alapján  $y = a + b$ .

Tekintsük az  $x + a = b$  egyenletet és tegyük fel, hogy  $x \mapsto x^2$  invertálható leképezés; jelölje  $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$  az inverzet. Azt állítjuk, hogy

$$x = a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$$



megoldás. Valóban, a Bol-azonosságok felhasználásával adódik

$$\begin{aligned} [a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}] \cdot a^{-1} [a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}] = \\ a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-1} a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{-\frac{1}{2}} \cdot b a^{-\frac{1}{2}}) a^{\frac{1}{2}} = b. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy Bol-loop elemeinek rendje osztja a loop rendjét, ezért ha  $|L|$  páratlan, akkor minden elem rendje páratlan; legyen  $x \in L$  rendje  $2k+1$ . Ekkor  $x = (x^{-k})^2$ , azaz  $x^{\frac{1}{2}} = x^{-k}$ , vagyis az  $x \mapsto x^2$  leképezés invertálható. Fordítva, ha  $|L|$  páros, akkor  $|L \setminus \{1\}|$  páratlan, így ezen a halmazon az  $x \mapsto x^{-1}$  leképezésnek kell legyen egy  $y \neq 1$  fixpontja. De  $y = y^{-1}$  egyenértékű az  $y^2 = 1$  egyenlőséggel, azaz  $x \mapsto x^2$  nem injektív.  $\square$

*Megjegyzés.* A bizonyítás utolsó lépése [Gla64]-ből származik.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a szóbanforgó loop páratlan rendű, azaz az  $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$  leképezés értelmes. Az  $(L, +)$  kvázicsoportozáshoz tartozó loop-pizotópot az alábbiak szerint tudjuk kiszámítani:

$$x \circ y = r_1^{-1}(x) + l_1^{-1}(y) = x^{\frac{1}{2}} + y^{-1} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y x^{\frac{1}{2}},$$

ahol  $r_1(x) = x + 1 = x^2$  és  $l_1(y) = l_1^{-1}(y) = 1 + y = y^{-1}$ . Az így kapott  $(L, \circ)$  loopnak néhány fontos tulajdonságát tudjuk levezetni. Elsőként megmutatjuk, hogy  $(L, \circ)$  Bol-loop.

Az 1.3.7 állítás szerint az új  $\lambda_y^\circ$  eltolások  $l_x l_1^{-1} = l_x l_1$  alakúak, és az  $l_y$  eltolások invariánsan hagyják az  $S^+ = \{l_x; x \in L\}$  halmazt. Így adódik, hogy  $S^\circ = S^+ l_1$  és

$$\lambda_x^\circ S^\circ \lambda_x^\circ = l_y l_1 S^+ l_1 l_y l_1 = S^+ l_1 = S^\circ.$$

Tehát  $(L, \circ)$  valóban Bol-loop. Ez alapján beszélhetünk az  $x \in L$  elem  $(L, \circ)$  loopbeli rendjéről is. Könnyen látható, hogy ez a rend megegyezik az eredeti  $(L, \cdot)$  loopbeli renddel, hisz  $x^{\frac{1}{2}}$  egy asszociatív-kommutatív részloopot generál, amelyre megszorítva a két szorzásművelet megegyezik.

A másik könnyen ellenőrizhető fontos tulajdonság, hogy a  $J : x \mapsto x^{-1}$  inverzképzés művelete loop-automorfizmus. Itt elegendő meggondolni, hogy minden  $x, y \in L$  esetén a Bol-azonosságokból következik, hogy  $(x \cdot yx)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} x^{-1}$ . (Ld. [Pfl90, IV.6.12. Theorem].)

**2.3.2. Definíció.** *Azokat a páratlan rendű véges Bol-loopokat, amelyekben az invertálás automorfizmus (jobb pszeudo-automorfizmus) Bruck-loopoknak (gyenge Bruck-loopoknak) vagy röviden csak B-loopoknak (B'-loopoknak) nevezzük.*

A B'-loopok osztályának bevezetését az indokolja, hogy ez az osztály geometriailag is leírható, azaz a B'-loop tulajdonság izotópinvariáns.

**2.3.3. Tétel.** *Legyen  $(L, \cdot)$  egy Bol-loop, jelölje  $N$  a Bol-tükrözések által generált kollineáció-csoportot és legyen  $N_{x\text{-teng}}$  az  $x$ -tengely  $N$ -beli stabilizátora. Az invertálás  $J : x \mapsto x^{-1}$  művelete akkor és csak jobb pszeudoautomorfizmus, ha  $N_{x\text{-teng}}$  az  $x$ -tengely valamely pontját stabilizálja. Ha a fixpont koordinátája  $(c, 1)$ , akkor  $c$  a  $J$  kísérőeleme.*

*Bizonyítás.* Mivel a  $G(L)_1$  stabilizátort az  $\lambda_{xy}^{-1}\lambda_x\lambda_y$  ( $x, y \in L$ ) elemek generálják, (2.4) szerint az  $N_{x\text{-teng}}$  csoportot az

$$(\lambda_{xy}\rho_{xy}\lambda_{x^{-1}}\rho_{x^{-1}}\lambda_{y^{-1}}\rho_{y^{-1}}, \lambda_{xy}^{-1}\lambda_x\lambda_y)$$

elemek generálják. Másrésztől, mivel a Bol-azonosságot a  $\lambda_x\rho_{xy} = \rho_y\lambda_x\rho_x$  egyenlőséggel is ki tudjuk fejezni, így

$$\lambda_{xy}\rho_{xy}\lambda_{x^{-1}}\rho_{x^{-1}}\lambda_{y^{-1}}\rho_{y^{-1}} = \lambda_{xy}\lambda_x^{-1}\lambda_y^{-1}\rho_{x^{-1}(y^{-1}\cdot yx)} = \lambda_{xy}\lambda_x^{-1}\lambda_y^{-1}$$

teljesül. Definíció szerint  $c$  akkor és csak akkor kísérőeleme a  $J$  jobb pszeudoautomorfizmusnak, ha fennáll  $y^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot c) = (yx)^{-1} \cdot c$ , ami a

$$c = (\lambda_{xy}\lambda_x^{-1}\lambda_y^{-1})(c)$$

egyenlőséggel ekvivalens, tehát azzal a ténnyel, hogy az  $N_{x\text{-teng}}$  generátor-elemei fixen hagyják a  $(c, 1)$  pontot.  $\square$

Az alábbi következmény az 1.5.2 állítás (ii) pontjával állítható párhuzamba.

**2.3.4. Következmény.** *Az univerzális  $B$ -loopok pontosan az Abel-csoportok.*

*Bizonyítás.* Az  $L$  Bol-loop összes izotópja a 2.3.3 tétel szerint kizárólag oly módon lehet  $B$ -loop, ha  $N_{x\text{-teng}}$  triviálisan hat az  $x$ -tengelyen. Ekkor  $N_{x\text{-teng}}$  elemei az összes függőleges egyenest rögzítik, vagyis az 1.5.3 tétel szerint  $(\lambda_n, id)$  alakúak. Ez azonban csak  $n = 1$  esetén lehetséges, azaz  $N_{x\text{-teng}} = \{id\}$ . Azaz  $N_0$  regulárisan hat a vízszintes egyenesek halmazán, vagyis  $G(L)$  regulárisan hat  $L$ -en. Ebből következik, hogy  $L$  csoport, az  $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$  tulajdonság miatt pedig Abel-csoport.  $\square$

**2.3.5. Tétel.** *(i) A  $B'$ -loop tulajdonság izotópia-invariáns.*

*(ii) Egy  $B$ -loop minden izotópja  $B'$ -loop.*

*(iii) Minden  $B'$ -loop izotóp egy  $B$ -loophoz.*

*Bizonyítás.* (i) Az előbbi jelölést használva elegendő arra rámutatnunk, hogy az  $N$  csoport tranzitívan hat a vízszintes egyenesek halmazán (ld. 2.2.2 tétel), s ezért az  $N_x$ -teng hatása az  $x$ -tengelyen ekvivalencia erejéig független az  $x$ -tengely megválasztásától. Ezzel megmutattuk (i)-et, amiből (ii) azonnal adódik.

(iii) Legyen  $(L, \cdot)$  egy  $B'$ -loop,  $\mathcal{N}$  a hozzátartozó 3-hálózat. Tekintsük az  $N_x$ -teng kollineáció-csoport egy az  $x$ -tengelyre illeszkedő  $P$  fixpontját. Legyen  $(L, \circ)$  a  $P$ -vel mint origóval koordinátázó loop. Ekkor  $(L, \circ)$  egy  $(L, \cdot)$ -lel izotóp  $B$ -loop.  $\square$

Az eddigi ismereteinket következőképpen foglalhatjuk össze.

**2.3.6. Tétel.** *Legyen  $(L, \cdot)$  egy páratlan rendű Bol-loop. Ekkor az  $L$  halmazon az*

$$x \circ y = x^{\frac{1}{2}} \cdot yx^{\frac{1}{2}}$$

*művelettel értelmezhetjük az  $(L, \circ)$   $B$ -loopot, amelyet társított  $B$ -loopnak nevezünk. Továbbá:*

- (i) *Az  $L$ -hez társított  $B$ -loop izotópiainvariáns.*
- (ii) *A két loopművelet akkor és csak akkor egyezik meg, ha  $(L, \cdot)$  kommutatív Moufang-loop.<sup>1</sup>*
- (iii) *A két loop  $(L, \cdot)$  és  $(L, \circ)$  akkor és csak akkor izomorf, ha  $(L, \cdot)$   $B$ -loop.*
- (iv) *A két loop  $(L, \cdot)$  és  $(L, \circ)$  akkor és csak akkor izotóp, ha  $(L, \cdot)$   $B'$ -loop.*

*Bizonyítás.* (i) Mivel a társított  $B$ -loop definíció szerint a loop szívének mint kvázicsoportnak a loop-izotópja, ezért a 2.2.4 állítás alapján izotópinvariáns.

Az  $xy = x^{\frac{1}{2}} \cdot yx^{\frac{1}{2}}$  egyenlőségből adódik  $yx^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y$  minden  $x, y \in L$  elemre, tehát  $(L, \cdot)$  kommutatív, s így egyben Moufang-loop is, (ii) következik.

A (iii) pont 'csak akkor' iránya nyilvánvaló. Az 'akkor' irány a [Gla64]-ben szereplő,  $B$ -loopokra vonatkozó  $x \cdot y^2x = (xy)^2$  azonosságból következik. Ez az azonosság ugyanis az

$$x^2 \circ y^2 = (xy)^2 \tag{2.5}$$

egyenlőséget vonja maga után, s így  $(L, \cdot)$  és  $(L, \circ)$  valóban izomorfak, ha  $(L, \cdot)$   $B$ -loop.

A (iv) pont 'csak akkor' iránya a 2.3.5 tétel (ii)-ből adódik. Tegyük most fel, hogy  $(L, \cdot)$  egy  $B'$ -loop. A 2.3.5 tétel (iii) pontja alapján létezik egy vele izotóp  $(L, \otimes)$   $B$ -loop, ami a tételünk (iii) pontja szerint izomorf a

---

<sup>1</sup>Az állításban szereplő *Moufang-loop* fogalmát a dolgozat következő részében definiáljuk és tárgyaljuk behatóan.

saját társított loopjával, ami az (i) pont miatt izomorf az eredeti  $(L, \cdot)$  loop társított loopjával.  $\square$

Az eddigiekből az derült ki, hogy az  $(L, \cdot)$  loophoz társított  $(L, \circ)$  B-loop az eredeti loop Abel-csoport tulajdonságól való „távolságát” méri. A következő állítás mutatja, hogy a dolog ennyire nem egyszerű, hiszen nem-asszociatív vagy nem-kommutatív  $L$  esetén is lehet  $(L, \circ)$  Abel-csoport.

**2.3.7. Állítás.** *Legyen  $(L, \cdot)$  egy páratlan rendű Bol-loop  $G(L)$  baloldali eltoláscsoporttal. Az  $(L, \circ)$  társított B-loop akkor és csak akkor Abel-csoport, ha  $G(L)$  nilpotens és nilpotenciaosztálya legfeljebb 2.*

*Bizonyítás.* Vegyük észre, hogy

$$\lambda_x^\circ(y) = x^{\frac{1}{2}} \cdot yx^{\frac{1}{2}} = \lambda_{x^{\frac{1}{2}}}\rho_{x^{\frac{1}{2}}}(y).$$

Ez definiál egy

$$\Psi : \begin{cases} N_0 \rightarrow G(L, \circ) \\ (\lambda_y\rho_y, \lambda_y^{-1}) \mapsto \lambda_{y^2}^\circ \end{cases}$$

szürjektív homomorfizmust az  $(L, \cdot)$ -hoz rendelt 3-hálózat kollineációcsoportjából  $G(L, \circ)$ -be. Ezzel azt is megmutattuk, hogy  $G(L, \circ)$  úgy hat  $L$ -en, mint az  $N_0$  a függőleges egyenesek halmazán (ld. (2.4)). A  $\Psi$  magjába azon  $N_0$ -beli elemek tartoznak, amelyek minden függőleges egyenest fixen hagynak, azaz  $(id, \rho_m)$  alakúak, ahol  $m \in N_\rho$ . A jobb nukleusz definíciója miatt  $\ker \Psi \leq Z(N_0)$  adódik. Ha tehát  $(L, \circ)$  Abel-csoport, akkor  $N_0/Z(N_0)$  is az, és  $N_0$  nilpotens legfeljebb 2 nilpotenciasztállyal. De mivel  $G(L)$  is előáll, mint  $N_0$  homomorf képe, az állítás ‘csak akkor’ részét beláttuk.

Tegyük most fel, hogy  $G(L)$  nilpotenciaosztálya legfeljebb 2. Könnyen leellenőrizhető, hogy minden ilyen csoportban teljesül

$$[a^{-1}, b^{-1}] = [a, b].$$

Legyen most

$$(a_0, a) = (\lambda_{x_1}\rho_{x_1}, \lambda_{x_1}^{-1}) \cdots (\lambda_{x_n}\rho_{x_n}, \lambda_{x_n}^{-1}) \in N_0$$

tetszőleges elem és jelölje  $\tilde{a} = \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_n}$  a ferde egyeneseken vett hatását.<sup>2</sup> Ekkor  $a\tilde{a} = \lambda_{x_1}^{-1} \cdots \lambda_{x_n}^{-1} \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_n} \in G(L)' \leq Z(G(L))$ , azaz  $\tilde{a} = a^{-1}c$ ,  $c \in Z(G(L))$  és

$$[\tilde{a}, \tilde{b}] = [a^{-1}, b^{-1}] = [a, b].$$

Ráadásul, mivel  $Z(G(L))$  minden eleme  $\rho_k$  ( $k \in N_\rho$ ) alakú, adódik, hogy  $N_0'$  elemei  $\langle u, \rho_k, \rho_k \rangle$ ,  $k \in N_\rho$  alakúak, ekkor viszont  $u = 1$  kell, hogy teljesüljön.

<sup>2</sup>Az 1.4.2. állításból következik, hogy  $(\lambda_x\rho_x, \lambda_x^{-1})$  hatása a ferde egyeneseken  $\lambda_x$ .

Ez azt jelenti, hogy  $N'_0 \leq \ker \Psi$ , azaz  $G(L, \circ)$  Abel-csoport, s így  $(L, \circ)$  maga is Abel-csoport.  $\square$

Az alfejezet utolsó állítása azt az esetet írja le, amikor a társított loop művelete kommutatív.

**2.3.8. Állítás.** *Legyen  $(L, \cdot)$  egy páratlan rendű Bol-loop. Ekkor a hozzá társított  $(L, \circ)$  loop akkor és csak akkor kommutatív Moufang loop, ha minden  $x, y \in L$  esetén teljesül*

$$(x \cdot yx)^2 = x^2 \cdot y^2 x^2.$$

*Bizonyítás.*  $(L, \circ)$  akkor és csak akkor kommutatív, ha minden  $x, y \in L$  esetén teljesül

$$\begin{aligned} x^2 \circ y^2 = y^2 \circ x^2 &\iff \lambda_{x \cdot y^2 x} = \lambda_{y \cdot x^2 y} \\ &\iff \lambda_x \lambda_y^2 \lambda_x = \lambda_y \lambda_x^2 \lambda_y \\ &\iff \lambda_x^2 \lambda_y^2 \lambda_x^2 = (\lambda_x \lambda_y \lambda_x)^2 \\ &\iff x^2 \cdot y^2 x^2 = (x \cdot yx)^2. \quad \square \end{aligned}$$

## 2.4. Struktúraelmélet $B$ -loopokra

Eddig láttuk, hogy minden  $B$ -loop előfordul mint egy páratlan rendű Bol-loop-hoz társított loop. A következőben bemutatjuk  $B$ -loopoknak egy másik, tisztán csoportelméleti konstrukcióját. Ez a megfontolás, csakúgy, mint az előző rész, Glauberman [Gla64, Gla68, Gla66] munkásságára vezethető vissza.

A továbbiakban  $G$  mindig egy véges csoportot fog jelölni,  $J$  pedig  $G$ -nek egy involutív automorfizmusát.

**2.4.1. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy a  $J$  a  $G$ -nek Glauberman-automorfizmus, ha a  $J$  anti-fix elemeinek<sup>3</sup>  $S = \{x \in G \mid x^J = x^{-1}\}$  halmaza generálja  $G$ -t és minden anti-fix elem páratlan rendű.*

Az alábbi igen mély tétel kulcsfontosságú.

**2.4.2. Tétel (Glauberman  $Z^*$ -tétele).** *Legyen  $G$  véges csoport  $J$  Glauberman-automorfizmussal. Jelölje  $\pi$  az  $xy$  elemek  $o(xy)$  rendjei prímtényezőinek halmazát. Ekkor  $G$   $\pi$ -csoport. Speciálisan,  $G$  rendje páratlan, tehát  $G$  feloldható.*

<sup>3</sup>Az  $x$  elem a  $J$  automorfizmus anti-fix eleme, ha  $x^J = x^{-1}$ .

*Bizonyítás.* Ld. [Gla66] és [Gla68, Theorem 15.].  $\square$

A Glauberman-automorfizmussal rendelkező csoportok és a  $B$ -loopok között szoros összefüggés van. Legyen ugyanis  $(L, \cdot)$  egy véges  $B$ -loop, és jelölje  $J : x \mapsto x^{-1}$  az inverzképzés műveletét.  $J$  automorfizmus volta egyenértékű a

$$J\lambda_x J = \lambda_x^{-1}, \quad (x \in L)$$

azonossággal, ami viszont azt jelenti, hogy  $J$  indukálja a  $G(L)$  baloldali eltoláscsoportnak egy involutív automorfizmusát, és az  $S(L)$  szelés elemei anti-fixek, az anti-fix elemek generálják  $G(L)$ -t. Megmutatjuk, hogy  $S(L)$ -en kívül nincs több anti-fix elem. A (2.5) egyenlőség  $(xy)^2 = x \cdot (y^2 \cdot x)$  alakba írva a

$$\lambda_{xy}^2 = \lambda_x \lambda_y^2 \lambda_x$$

egyenlőséget vonja maga után, amiből

$$\lambda_{xy}^{-1} \lambda_x \lambda_y = \lambda_{xy} \lambda_x^{-1} \lambda_y^{-1} = J \lambda_{xy}^{-1} \lambda_x \lambda_y J$$

adódik. Azaz  $G(L)_1$  elemei mind  $J$ -fixek. És mivel  $G(L)$  elemeit egyértelműen fel tudom írni  $\lambda_x u$  alakban ( $x \in L, u \in G(L)_1$ ), kapjuk, hogy  $G(L)_1$  elemei pont a fix, az  $S(L)$  elemei pedig pont az anti-fix elemek. Következik továbbá, hogy  $J$  a  $G(L)$  csoport Glauberman-automorfizmusa. Beláttuk tehát az alábbi állítást (vö. [Gla64, Theorem 1,2]).

**2.4.3. Állítás.** *Az  $(L, \cdot)$   $B$ -loop esetén, a  $J : x \mapsto x^{-1}$  inverzképzés a  $G(L)$  eltoláscsoport egy Glauberman-automorfizmusát generálja.  $J$  fixelemeinek a csoportja a  $G(L)_1$  stabilizátor részcsoport, az anti-fix elemek halmaza pedig az  $S(L)$  szelés.  $\square$*

Fordítva, induljunk most ki a  $(G, J)$  párból, ahol  $J$  a  $G$  csoport Glauberman-automorfizmusa. Legyen  $U = C_G(J)$  és jelölje  $S$  az anti-fix elemek halmazát. Definíció szerint  $S$  elemei páratlan rendűek, azaz  $S \cap U = \{1\}$ . Az is nyilvánvaló, hogy az  $S$  halmaz  $U$ -invariáns. Tekintsünk egy tetszőleges  $g \in G$  elemet. A  $g^J g^{-1}$  elem anti-fix, tehát páratlan rendű, így az alábbi leképezés értelmes:

$$\text{pr}(g) = (g^J g^{-1})^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{pr} : G \rightarrow S.$$

Teljesül továbbá

$$(g^{-1} \text{pr}(g))^J = g^{-J} (g^J g^{-1})^{\frac{1}{2}} = g^{-1} (g^J g^{-1})^{-1} (g^J g^{-1})^{\frac{1}{2}} = g^{-1} \text{pr}(g) \in U,$$

ami azt jelenti, hogy  $g = \text{pr}(g)u \in SU$ . Másrésztől a  $g = su$  előállítás egyértelmű, hisz  $st^{-1} \in U$  ( $s, t \in S$ ) egyenértékű az  $s^2 = t^2$  formulával, amiből  $s = t$  következik.

**2.4.4. Állítás.** Legyen  $J$  a  $G$  csoport Glauberman-automorfizmusa,  $U = C_G(J)$  és jelölje  $S$  a  $J$  anti-fix elemeinek halmazát. Vezessük be  $S$ -en a következő műveletet.

$$s, t \in S : \quad s \circ t = \text{pr}(st).$$

Ekkor  $(S, \circ)$   $B$ -loop, melynek baloldali eltoláscsoportja  $G/K$ -val izomorf, ahol  $K = \text{core}_G(U)$ . Továbbá,  $J$  a loop inverzképzése által generált automorfizmus.

*Bizonyítás.* Könnyen leellenőrizhető, hogy  $x = \text{pr}(s^{-1}t)$  és  $y = s^{-1}\text{pr}(st)s^{-1}$   $S$ -beli elemek az  $s \circ x = t$  és  $y \circ s = t$  egyenletek megoldásai,  $1 \in S$  pedig egységelem, tehát  $(S, \circ)$  loop. Érvényes továbbá minden  $s \in S$  esetén a

$$\text{pr}(s \text{pr}(x)) = \text{pr}(sx)$$

egyenlőség. Ennek felhasználásával megmutatható az

$$s \circ (t \circ (s \circ r)) = (s \circ (t \circ s)) \circ r$$

Bol-azonosság. A  $G_{\text{bal}}(B, \circ) \cong G/K$  állítás abból következik, hogy  $stU = (s \circ t)U$  miatt a

$$t \mapsto s \circ t \quad \text{és a} \quad tU \mapsto stU$$

hatások ekvivalensek. □

A 15. oldalon definiált fogalmak felhasználásával az alábbi struktúratételt tudjuk bebizonyítani  $B$ -loopokra (vö. [Gla64, Lemma 5(v)]).

**2.4.5. Tétel.** Legyen  $(L, \cdot)$   $B$ -loop,  $G = G(L)$ , és jelöljük  $J$ -vel a loopbeli  $x \mapsto x^{-1}$  inverzképzés műveletét és az általa generált Glauberman-automorfizmust egyidejűleg. Ekkor létezik egy megfeleltetés a  $G$   $J$ -invariáns normálosztói és az  $L$  normális részloopjai között az alábbiak szerint:

- (i) Az  $N \triangleleft G$   $J$ -invariáns normálosztó esetén  $\kappa(N) = N(1) \triangleleft L$  normális részloop.
- (ii) Legyen  $K \triangleleft L$  normális részloop és definiáljuk a  $H = \{g \in G; g(K) = K\}$  részcsoportot. Ekkor  $\nu(K) = \text{core}_G(H)$  zárt normálosztó.
- (iii) Teljesül  $\kappa(\nu(K)) = K$  és  $\nu(\kappa(N)) = \bar{N}$ .
- (iv) A  $K \triangleleft L$  normális részloop esetén  $G(L/K) \cong G(L)/\nu(K)$ .

*Bizonyítás.* Először megmutatjuk, hogy  $N \triangleleft G$  esetén  $K = N(1)$  normális részloop. Ehhez három észrevétel szükséges. Egyrészt minden  $g \in G$  esetén  $(gN)^{\frac{1}{2}} = g^{\frac{1}{2}}N$ , mivel a gyökvonás valójában egy megfelelő hatványra emelés.

Másrészt  $k = n(1) \in K$  ( $n = \lambda_k u \in N$ ) esetén  $\lambda_k = \text{pr}(n) \in N$ . Harmadrészt pedig minden  $x \in L$ ,  $k \in K$  esetén

$$\lambda_{xk} = \lambda_x n, \quad n \in N.$$

Valóban,

$$\lambda_{xk}^2 = \lambda_x \lambda_k^2 \lambda_x = \lambda_x^2 n_1 \Rightarrow \lambda_{xk} = \lambda_x n_2,$$

az előző megjegyzés alapján. Ekkor viszont

$$\begin{aligned} \lambda_{xk_1 \cdot yk_2} &= (\lambda_{xk_1} \lambda_{yk_2}^2 \lambda_{xk_1})^{\frac{1}{2}} \\ &= (\lambda_x n_1 \lambda_y^2 n_2 \lambda_x n_1)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\lambda_x \lambda_y^2 \lambda_x n_3)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda_{xy} n_4. \end{aligned}$$

Minkét oldalba 1-et helyettesítve adódik

$$\forall x, y \in L, \forall k_1, k_2 \in K: \quad xk_1 \cdot yk_2 = xy \cdot k_3,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy  $K \triangleleft L$ . Ezzel (i)-t beláttuk.

Tételezzük most fel, hogy  $K \triangleleft L$ , és definiáljuk  $H$ -t és  $N = \nu(K)$ -t a tételben leírtak szerint. Egyrészt, mivel minden  $k \in K$  esetén  $\lambda_k \in H$ . Másrészt  $U = G(L)_1 \leq H$ , hiszen a  $K$  normális részlooppra minden  $x, y \in L$  esetén teljesül  $x \cdot yK = xy \cdot K$ . Továbbá,  $xK = Kx$  az  $x^{-1} \cdot kx = k' \in K$  egyenlőséget vonza maga után, azaz minden  $x \in L$  elemre

$$\lambda_x^{-1} \lambda_k \lambda_x = \lambda_{k'} u \in H, \quad (u \in U).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy  $\lambda_k \in N$ ,  $N$  tranzitívan hat  $K$ -n és zárt. Ezzel megmutattuk (ii)-t.

A (iii) ponthoz elegendő meggondolni, hogy  $\kappa(\nu(K)) = \nu(K)(1) = H(1) = K$ , valamint  $\bar{N} = \nu(\kappa(N))$  következik  $NU = \bar{N}U$ , azaz  $N(1) = \bar{N}(1)$ -ből.

Végül bebizonyítjuk (iv)-t. Rögzítsünk egy  $K \triangleleft L$  normális részloopot. Az előző fejezet 1.2.5 állítása szerint elegendő belátni, hogy  $\nu(K)$  pontosan azon  $G(L)$ -beli elemek halmaza, amelyek a  $K$  mellékosztályait invariánsan hagyják. Nyilván  $\nu(K)$  része ennek a halmaznak. Tekintsünk most egy  $h$  elemet, amelyre  $g(xK) = xK$  minden  $x \in L$ -re.  $h(K) = h(1)K = K$  miatt  $h \in H = \{g \in G; g(K) = K\}$ . Ezen kívül, bármely  $g \in G$  elemre

$$(ghg^{-1})(xK) = g(h(g^{-1}(xK))) = g(g^{-1}(xK)) = xK,$$

azaz  $ghg^{-1} \in H$ , és  $h \in \text{core}_G(H) = \nu(K)$ . □



A bizonyításból az is következik, hogy  $G(L)$ -nek nincs nem-triviális tranzitív  $J$ -invariáns normálosztója. Egy ilyen  $N$  normálosztó ugyanis szükségképpen tartalmazza az összes  $\lambda_x$  eltolást ( $x \in L$ ), tehát  $N = G(L)$ . (Vö. [Gla64, Lemma 8(iii)].)

Mivel  $|G(L)|$  páratlan,  $G(L)' \neq G(L)$  nem tranzitív, azaz  $H = G(L)'U \neq G(L)$ . Másrészt  $H$  egy  $J$ -invariáns, zárt normálosztó  $G(L)$ -ben, így a fenti tétel miatt  $K = H(1) \triangleleft L$  valódi normális részloop. Ráadásul  $G(L/K) = G(L)/H$  Abel-csoport, azaz  $L/K$  Abel-csoport, és  $K$  tartalmazza az  $L'$  kommutátor-asszociátor részloopot. Azaz  $L' \neq L$ . Ezzel beláttuk az alábbi állítást, ami melleleg ekvivalens a fent idézett  $Z^*$ -tétellel (vö. [Gla68, Theorem 14 és az azt követő Corollary 1]).

**2.4.6. Tétel ([Gla68, Theorem 14]).** *Minden véges  $B$ -loop feloldható.  $\square$*

*Megjegyzés.* Igaz, hogy az utóbbi tételt csak [Gla68]-ben bizonyítják be, a végeredmény megelégtetésével Glauberman [Gla64]-ben megmutatja, hogy a  $B$ -loopok osztályára teljesülnek Sylow és Cauchy véges csoportokra vonatkozó tételei.

## 2.5. Példák

A legkisebb nem-asszociatív Bol-loop nyolcelemű (ld. [Bur78]). Hat ilyen loop van, ezek két izotópiaosztályt alkotnak. Az egyik ilyen loop szorzótáblája:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	6	7	8	3	4	5
3	3	6	1	5	4	2	8	7
4	4	7	8	1	6	5	2	3
5	5	8	4	3	1	7	6	2
6	6	3	2	8	7	1	5	4
7	7	4	5	2	3	8	1	6
8	8	5	7	6	2	4	3	1

A loop szelése:

$$S = \{ (1), (12)(36)(47)(58), (13)(26)(45)(78), (14)(27)(38)(56), (15)(28)(34)(67), (16)(23)(48)(57), (17)(24)(35)(68), (18)(25)(37)(46) \}.$$

Mint látható, a loop exponense 2.

A következő példánk általános konstrukció. Legyen  $T$  egy páratlan rendű csoport. Ekkor a 2.3.1 állítás szerint  $(T, +)$  kvázicsoport, a hozzá tartozó  $(T, \circ)$  loop pedig  $B$ -loop, ahol

$$x \circ y = x^{\frac{1}{2}} y x^{\frac{1}{2}}.$$

Persze a 2.3.7 állítás szerint csak akkor kapunk valódi (azaz nem Abel-csoport)  $B$ -loopot, ha  $T$  nem nilpotens, vagy a nilpotenciaosztálya legalább 3.

Fontos megjegyezni, hogy nem minden  $B$ -loop származtatható páratlan rendű csoportból. Szemidirekt szorzathoz hasonló konstrukcióval gyárthattunk pl. 15 elemű nem-asszociatív  $B$ -loopot [NR81], viszont egy 15-ödrendű csoport Abel-féle, ami pedig izomorf a társított  $B$ -loopjához.

A harmadik példánk nem véges loopot ad. Ennek ellenére joggal nevezhetjük  $B$ -loopnak, hiszen Bol-loop, az invertálás automorfizmus, és a gyökvonás művelete is elvégezhető a páratlan rendű  $B$ -loopoknál látott tulajdonságok mellett. A konstrukció a hiperbolikus geometriából származik, a hiperbolikus sík eltolásaival van összefüggésben. (Jóllehet ez a mi terminológiánkból nem derül ki.)

Legyen  $G = \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$  a pozitív determinánsú valós  $n \times n$  mátrixok csoportja, jelölje  $S$  a pozitív definit szimmetrikus mátrixok halmazát, és legyen  $U = \text{SO}(n)$ . Bármely  $X \in G$  mátrixnak létezik egyértelmű

$$X = PA$$

polárfelbontása, ahol  $P = \sqrt{X^t X} \in S$  és  $A \in H$ . Itt  $J$ -t mint az  $X \mapsto (X^t)^{-1}$  automorfizmust tudjuk értelmezni. Ekkor tetszőleges  $X \in G$  elemre

$$\text{pr}(X) = \sqrt{X^t X},$$

és  $A, B \in S$  esetén

$$A \circ B = \text{pr}(AB) = \sqrt{AB^2 A}$$

Bol-loop. Ez a példa azt is mutatja, hogy a  $B$ -loopok feloldhatóságáról szóló 2.4.6 tétel (mint Glauberman  $Z^*$ -tétele) szigorúan csak a véges esetben érvényes.

További példák és konstrukciók a dolgozat hátralévő részében is szerepelnek, továbbá ilyenek széles tárháza és áttekintése található [Che90]-ban.

## 3. fejezet

# Moufang-loopok és 3-hálózatok

A Moufang-loopok elnevezése RUTH MOUFANG német matematikusra utal, aki elsőként vizsgálta ezt a struktúrát kvázicsoport néven az 1934-ben megjelent [Mou34] cikkében. Később sokan foglalkoztak ezzel a témakörrel, hisz a Moufang-loopok az asszociativitáshoz legközelebb álló fontos looposztálynak tekinthetők.

S. DORO [Dor78] cikkében leírta a kapcsolatot a Moufang-loopok és a trialitással rendelkező csoportok között. Ez a kapcsolat meglehetősen bonyolult, különösen ha a loop nukleusza nem triviális. A 3.2 alfejezetben ezt a kapcsolatot egy egyszerűbb geometriai megközelítésből tárgyaljuk, természetesen a Bol-tükrözések felhasználásával. Fő eredményünk (a 3.2.5 és 3.2.4 tételek), hogy a trialitással rendelkező csoportok közvetlenül megfeleltethetők a Moufang-looppal koordinátázott 3-hálózatoknak, tudomásunk szerint új. Ezeket az eredményeket a [Nag99] dolgozatban is összefoglaltuk.

Az alfejezet végén ismertetjük a véges egyszerű Moufang-loopok osztályozásának főbb lépéseit (3.2.10 tétel). Az osztályozás, mely M.W. LIEBECK nevéhez fűződik, a trialitással rendelkező véges egyszerű csoportok leírásán alapszik. Az utolsó 3.3 alfejezetben a Cayley-számok osztásgyűrűjének konstrukcióját és a hozzájuk szorosan kapcsolódó egyszerű Moufang-loopoknak L.J. PAIGE-féle leírását ismertetjük.

### 3.1. Moufang-loopok

Mint a (bal) Bol-azonosság definiálásakor hangsúlyoztuk, ez a tulajdonság aszimmetrikus, azaz előfordulhat, hogy a szorzásművelet csak az egyik oldalon rendelkezik szép tulajdonságokkal. Ez nem történhet meg, ha a Bol-

azonosság duálisát is megköveteljük.

$$\begin{aligned} \text{(Bal oldali) Bol-azonosság:} \quad & x \cdot (y \cdot xz) = (x \cdot yx) \cdot z \\ \text{Duális (jobb oldali) Bol-azonosság:} \quad & (xy \cdot z) \cdot y = x \cdot (yz \cdot y) \end{aligned}$$

**3.1.1. Definíció.** *A kétoldali Bol-loopokat Moufang-loopnak nevezzük. Egy Moufang-loop által koordinátázott 3-hálózatot Moufang-hálózatnak nevezünk.*

Hangsúlyozzuk ki Bol-tükrözések egy triviális, de fontos tulajdonságát. Egy kollineáció akkor és csak akkor Bol-tükrözés, ha egy adott egyenes (a tengely) pontjait fixen hagyja, és a tengelyétől különböző két párhuzamossági osztályt felcseréli. Tehát Bol-tükrözések konjugáltja is Bol-tükrözés, és két Bol-tükrözés pontosan akkor konjugált, ha létezik egy olyan kollineáció, amely az egyiknek a tengelyét a másikéba viszi.

A Moufang-féle 3-hálózatok tehát pont azok, ahol minden egyenesre elvégezhető a Bol-tükrözés. Sőt, ha tudjuk, hogy a hálózat Bol-féle (azaz a függőleges egyenesekre tudunk tükrözni), és létezik egy függőleges vagy ferde egyenes, amire szintén tudunk tükrözni, akkor minden egyenesre tudunk, mert a függőleges tengelyű tükrözések által generált kollineációcsoport tranzitívan hat a vízszintes és ferde egyenesek egyesített halmazán.

Másrészt azt is tudjuk, hogy az  $y$ -tengelyre való tükrözés egyenértékű a bal inverz tulajdonsággal. Hasonlóan meggondolható, hogy az  $x$ -tengelyre való tükrözés a jobb inverz tulajdonsággal ekvivalens. Azt kaptuk tehát, hogy egy Bol-loop pontosan akkor Moufang-féle, ha rendelkezik a jobb inverz tulajdonsággal.

**3.1.2. Lemma.** *Egy Bol-loop esetén a jobb inverz tulajdonság ekvivalens az  $xy \cdot x = x \cdot yx$  azonossággal. (Ezen azonosság által leírt tulajdonságot flexibilitásnak nevezik.) Azaz, egy Bol-loop pontosan akkor Moufang-féle, ha teljesül a flexibilitás azonossága.*

*Bizonyítás.* A Bol-tulajdonság miatt azonosan teljesül  $xy = (x \cdot yx)x^{-1}$ . Ebből a jobb inverz tulajdonság megléte esetén azonnal adódik a flexibilitás. Fordítva, flexibilitást feltételezve az  $(xy \cdot x)x^{-1} = xy$  azonosságot kapjuk, ami  $z = xy$  helyettesítéssel a jobb inverz tulajdonság  $zx \cdot x^{-1} = z$  azonosságával ekvivalens.  $\square$

Egy másik fontos észrevétel a következő. Legyen  $(L, \cdot)$  egy olyan loop, amely egyaránt rendelkezik a jobb és a bal inverz tulajdonsággal. Akkor  $x = xy \cdot y^{-1}$  miatt  $(xy)^{-1} \cdot x = y^{-1}$  teljesül, amiből a csoportokban jól ismert

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

azonosság adódik. Vagyis Moufang-loopokban az invertálás anti-automorfizmus, a szorzás „szimmetrikus”, azaz az azonosságok dualizálhatók.

**3.1.3. Állítás.** *Az  $(L, \cdot)$  loop pontosan akkor Moufang-féle, ha az alábbi három azonosság valamelyike (s így persze mindegyike) teljesül.*

$$(M1) \quad x \cdot (y \cdot xz) = (xy \cdot x) \cdot z.$$

$$(M2) \quad (xy \cdot z) \cdot y = x \cdot (y \cdot zy).$$

$$(M3) \quad xy \cdot zx = (x \cdot yz) \cdot x.$$

*Bizonyítás.* (Ld. [Bru58, VII. Lemma 3.1.].) Tegyük fel, hogy  $L$  Moufang-loop. (M1) következik a Bol-tulajdonságból és a flexibilitásból. Ha pedig (M1)-ből indulunk ki, akkor  $z = 1$  helyettesítéssel kapjuk a flexibilitást, azzal pedig (M1) egyszerűen a Bol-azonossággal ekvivalenssé válik (vö. 3.1.2 lemma). Látható, hogy (M2) az (M1) duálisa, azzal nem kell külön foglalkozni.

Az (M3) vizsgálatát kezdjük azzal, hogy a három azonosságot lefordítjuk a 3-hálózat kollineációinak nyelvére. Ez megtehető, hisz a fenti azonosságok rendre ekvivalensek azzal a ténnyel, hogy a

$$\langle \rho_x \lambda_x, \lambda_x^{-1}, \lambda_x \rangle, \langle \rho_x^{-1}, \lambda_x \rho_x, \rho_x \rangle, \langle \lambda_x, \rho_x, \rho_x \lambda_x \rangle$$

hármassok autotopizmusok, azaz, az 1.4.2 állítás szerint, a

$$(\rho_x \lambda_x, \lambda_x^{-1}), (\rho_x^{-1}, \lambda_x \rho_x), (\lambda_x, \rho_x) \quad (3.1)$$

leképezések a 3-hálózat kollineációi. Látható, hogy az (M3)-hoz tartozó kollineáció a másik kettő szorzata, vagyis (M3) következik (M1)-ből és (M2)-ből.

Tegyük most fel, hogy az  $L$  loopban (M3) azonosan teljesül. Az  $x = y^{-1}$  illetve  $x = z^{-1}$  helyettesítésekkel megkapjuk a bal illetve jobb inverz tulajdonságot, tehát az  $L$ -hez tartozó 3-hálózatban az  $x$ - és  $y$ -tengelyekre tudunk tükrözni. De a  $(\lambda_x, \rho_x)$  kollineációk által generált kollineációcsoport tranzitíven hat mind a függőleges, mind a vízszintes egyenesek halmazán, azaz minden egyenesre tudunk tükrözni, s így a 3-hálózat Moufang-féle,  $L$  pedig Moufang-loop.  $\square$

Nagy jelentőségű az alábbi Moufang-loopokra vonatkozó tétel.

**3.1.4. Tétel (Moufang tétele).** *Ha  $a, b, c$  az  $L$  Moufang-loop három eleme úgy, hogy teljesül  $ab \cdot c = a \cdot bc$ , akkor  $\{a, b, c\}$  az  $L$  egy asszociatív részloopját generálja. Speciálisan,  $L$  di-asszociatív, azaz bármely két elem által generált részloop asszociatív.*

*Bizonyítás.* Ld. [Bru58, 117. oldal].  $\square$

## 3.2. Moufang-hálózatok és csoportok trialitással

Ez a fejezet szoros szálakkal kapcsolódik S. Doro [Dor78] cikkéhez, jóllehet a megértéséhez nem szükséges [Dor78] ismerete, az eddig elmondottak alapján az anyag önmagában is érthető.

A legfontosabb definíció a következő.

**3.2.1. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy a  $(G, S)$  pár csoport trialitással, ha  $G$  csoport,  $S \leq \text{Aut}(G)$ ,  $S = \langle \sigma, \rho; \sigma^2 = \rho^3 = (\sigma\rho)^2 = 1 \rangle \cong S_3$ , és minden  $g \in G$  esetén teljesül a*

$$[g, \sigma] [g, \sigma]^\rho [g, \sigma]^{\rho^2} = 1$$

trialitás-azonosság.

A továbbiakban a  $(G, S)$  jelölés mindig trialitással rendelkező csoportra utal,  $\sigma$  és  $\rho$  pedig az  $S$  megfelelő elemeit,  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma\rho$  és  $\sigma_3 = \rho\sigma$  pedig mindig az  $S$  három involúcióját fogja jelölni. Szükségünk lesz még a  $\mathcal{C}_i = \sigma_i^G$  jelölésre.

A következő lemma lényegében megegyezik az R.A. Parkernak tulajdonított [Lie87, Lemma 3.2]-vel.

**3.2.2. Lemma.** *A  $(G, S)$  pár akkor és csak akkor csoport trialitással, ha minden  $\tau_i \in \mathcal{C}_i, \tau_j \in \mathcal{C}_j$  ( $i \neq j$ ) esetén  $(\tau_i \tau_j)^3 = 1$ . Ekkor a  $(G, \langle \tau_i, \tau_j \rangle)$  pár szintén csoport trialitással.*

*Bizonyítás.* Az első állítás feltétele a  $\mathcal{C}_i$  konjugáltosztályokról mond valamit, amik nem változnak, ha az  $S$ -ről áttérünk a  $\langle \tau_i, \tau_j \rangle$  csoportra. Ezért az első állításból következik a második.

Az első állításhoz elegendő az  $i = 1, j = 2, \tau_1 = \sigma, \tau_2 = (\sigma\rho)^g$  esetet vizsgálni, tetszőleges  $g \in G$  elemre. Ekkor

$$\begin{aligned} 1 = (\sigma(\sigma\rho)^g)^3 &\iff 1 = \sigma g^{-1} \sigma \rho g \cdot \sigma g^{-1} \sigma \rho g \cdot \sigma g^{-1} \sigma \rho g \\ &\iff 1 = g \sigma g^{-1} \sigma \rho \cdot g \sigma g^{-1} \sigma \rho \cdot g \sigma g^{-1} \sigma \rho \\ &\iff 1 = [g^{-1}, \sigma] \rho [g^{-1}, \sigma] \rho^{-2} [g^{-1}, \sigma] \rho \\ &\quad = [g^{-1}, \sigma] [g^{-1}, \sigma]^{\rho^{-1}} [g^{-1}, \sigma]^\rho, \end{aligned}$$

ami ekvivalens azzal, hogy a trialitás-azonosság teljesül minden  $g \in G$  elemre.  $\square$

A következő lemma már sejteti a kapcsolatot a Moufang-hálózatok és a trialitással rendelkező csoportok között.

**3.2.3. Lemma.** *Legyen  $P$  az  $\mathcal{N}$  Moufang-féle 3-hálózat tetszőleges rögzített pontja és  $\ell_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) a  $P$ -re illeszkedő három egyenes, a megfelelő  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Bol-tükrözésekkel. Ekkor az  $S = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle \cong S_3$  kollineációcsoport hűen hat az  $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$  halmazon. Ez a hatás ekvivalens az  $\mathcal{N}$  párhuzamossági osztályain indukált hatással.*

*Bizonyítás.* Mint a fejezet elején hangsúlyoztuk, egy Bol-tükrözés konjugáltja is Bol-tükrözés a megfelelő tengellyel. Ezért  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ , ami bizonyítja az első állítást. A további állítások triviálisok.  $\square$

A fenti lemmák segítségével be tudjuk bizonyítani a tételünket.

**3.2.4. Tétel.** *Legyen  $M$  az  $\mathcal{N}$  Moufang-hálózat összes Bol-tükrözése által generált kollineációcsoport, és legyen  $M_0 \leq M$  az iránytartó kollineációkból álló részcsoporthoz. Rögzítsünk egy tetszőleges  $P$   $\mathcal{N}$ -beli pontot, és legyen  $S$  a  $P$ -re illeszkedő egyenesek tükrözései által generált csoport. Ekkor  $M = M_0S$  és az  $(M_0, S)$  pár csoport trialitással.*

*Bizonyítás.* Nyilván  $M_0 \triangleleft M = M_0S$ , így  $S$  a konjugálással  $M_0$  automorfizmus-csoportja. A 3.2.2 lemma miatt elegendő belátni, hogy  $\langle \sigma_1^g, \sigma_2^h \rangle \cong S_3$  minden  $g, h \in M_0$  esetén, ahol  $\sigma_1$  és  $\sigma_2$   $P$ -re illeszkedő különböző egyenesekre vett tükrözések. Viszont  $g$  és  $h$  iránytartóak, azaz  $\sigma_1^g, \sigma_2^h$  tengelyei metszik egymást egy  $P'$  pontban, így a 3.2.3 lemma alapján  $\langle \sigma_1^g, \sigma_2^h \rangle \cong S_3$ .  $\square$

Ennek a megfordítása is igaz.

**3.2.5. Tétel.** *Legyen  $(G, S)$  egy csoport trialitással. Ekkor az alábbi konstrukció egy  $\mathcal{N}(G, S)$  Moufang-féle (duális) 3-hálózatot<sup>1</sup> határoz meg. A három egyenesosztályt feleltessük meg a három  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  és  $\mathcal{C}_3$  konjugáltosztálynak. Három, páronként nem párhuzamos  $\sigma_1^g, \sigma_2^h, \sigma_3^f$  ( $g, h, f \in G$ ) egyenes akkor és csak akkor illeszkedik egy pontra, ha*

$$\langle \sigma_1^g, \sigma_2^h, \sigma_3^f \rangle \cong S_3.$$

*Továbbá, ha  $G_1 = [G, S]S$ , akkor az  $M(\mathcal{N})$   $\mathcal{N}$ -beli tükrözések által generált csoportra teljesül*

$$M(\mathcal{N}) \cong G_1/Z(G_1).$$

*Bizonyítás.* A definíció szerint párhuzamos egyenesek nem metszik egymást. A trialitás-azonosság 3.2.2 lemmabeli megfogalmazása pedig garantálja, hogy

---

<sup>1</sup>Egy pont-egyenes illeszkedési struktúra duálisát a pontok és az egyenesek szerepének felcserélésével kaphatjuk meg. A fenti esetben ez egyszerűen azt jelenti, hogy minden pontot azonosítunk a ráilleszkedő egyenesek halmazával.

két, nem párhuzamos egyenesnek legyen metszéspontja, és erre a metszéspontra pontosan egy további egyenes illeszkedjen, és ez a harmadik egyenes a harmadik párhuzamossági osztályba tartozzon. Ezzel beláttuk, hogy  $\mathcal{N}(G, S)$  valóban 3-hálózat.

A Moufang-tulajdonság is közvetlenül adódik, hiszen minden egyenest azonosítottunk egy involutív kollineációval, amely (a konjugálás útján) az egyenesre illeszkedő pontokat rögzíti és az egyenesétől különböző párhuzamossági osztályokat felcseréli.

Végül, mivel  $G_1 = [G, S]S = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3 \rangle$ , és egy  $\mathcal{N}$ -beli tükrözések úgy hat az  $\mathcal{N}$  egyenesein, mint a  $\mathcal{C}_i$  elemei az  $\cup \mathcal{C}_i$ -n a konjugálással, ezért adódik az  $M(\mathcal{N}) \cong G_1/Z(G_1)$  izometria.  $\square$

Az egyszerű véges Moufang-loopok osztályozása a trialitással rendelkező egyszerű véges csoportok osztályozásán alapul. A Moufang-loopok és a trialitással rendelkező csoportok közötti kapcsolatot elsőként Doro mutatta meg a [Dor78] cikkében. Az ő konstrukciójának hátránya, hogy a hozzárendelés bonyolult, és különösen az lehet, ha a loop nukleusza nem triviális. A mi eljárásunkból a loopok teljesen kimaradnak, és a geometriai felépítés egyszerű és szemléletes.

A Doro-féle megközelítésben még egy fontos lépés van, amelynél úgy érezzük, hogy a loopokra épülő bizonyítás nehezkesebb, mint a geometriai.

**3.2.6. Állítás.** *Legyen  $(G, S)$  egy véges csoport trialitással és tegyük fel, hogy  $\rho \in \text{InnAut}(G)$ . Ekkor minden  $[g, \sigma]$  elem rendje 3, és  $[G, S]$  3-csoport. Továbbá, az  $\mathcal{N}(G, S)$  3-hálózat által meghatározott loop centrálisan nilpotens.*

*Bizonyítás.* Legyen  $H = GS$ . Ha  $\rho \in \text{InnAut}(G)$ , akkor léteznek  $r \in G$ ,  $c \in C_H(G)$  elemek, hogy  $\rho = rc$ . Ekkor viszont

$$\rho = [\rho, \sigma] = [r, \sigma]c',$$

ahol  $c' \in C_H(G)$ , hiszen  $C_H(G) \triangleleft H$ . Ez azt jelenti, hogy

$$\rho[\sigma, r] = \rho^{-1}\sigma\rho \cdot r^{-1}\sigma r \in C_H(G).$$

Legyen  $\tau_1 = \sigma^r$ ,  $\tau_2 = \sigma_2 = \sigma^\rho$ . A 3.2.2 lemma szerint  $\tilde{S} = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \cong S_3$  és  $(G, \tilde{S})$  csoport trialitással, valamint a  $\mathcal{C}_i$  konjugáltosztályok is változatlanok. Ami viszont fontos változás, hogy  $\tilde{\rho} = \tau_1\tau_2$  centralizálja  $G$ -t, azaz a trialitásazonosságból  $[g, \tau_1]^3 = 1$  lesz. Ez viszont ekvivalens a számunkra kívánatos  $[g, \sigma]^3 = 1$  azonossággal.

Ez utóbbiból Glauberman  $Z^*$ -tétele miatt adódik, hogy a  $[G, \sigma_i]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) csoportok 3-csoportok. Ezek viszont normalizálják egymást és közösen generálják  $[G, S]$ -t, azaz  $[G, S]$  is 3-csoport. Ebből következik, hogy a



meghatározott  $\mathcal{N}(G, S)$  hálózat rendje, s így a koordináta-loop rendje is, 3-hatvány. Márpedig [Gla68, Theorem 4] szerint a véges Moufang-féle 3-loopok centrálisan nilpotensek.  $\square$

A fentiek alapján a véges egyszerű Moufang-loopok osztályozása az alábbi lépésekben történik.

**3.2.7. Állítás.** *Legyen  $\varphi : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$  egy irány- és illeszkedéstartó leképezés két 3-hálózat között.*

- (i) *Tegyük fel, hogy  $\varphi(P_1) = P_2$  teljesül a  $P_1, P_2$  pontokra. Ekkor  $\varphi$  természetes módon definiál egy  $\tilde{\varphi} : L_1 \rightarrow L_2$  homomorfizmust, ahol  $L_i$  az  $\mathcal{N}_i$  3-hálózat koordináta-loopja  $P_i$  origóval. Fordítva, egy  $\tilde{\varphi} : L_1 \rightarrow L_2$  loop-homomorfizmus egyértelműen meghatároz egy  $\varphi : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$  illeszkedéstartó leképezést.*
- (ii) *Tegyük most fel, hogy a  $\mathcal{N}_i$  hálózatok ( $i = 1, 2$ ) Moufang-félék és  $\varphi$  egy szürjektív homomorfizmus. Jelölje  $(M_i, S)$  az  $\mathcal{N}_i$  hálózathoz tartozó trialitásos csoportot. Ekkor a  $\sigma_\ell \mapsto \sigma_{\varphi(\ell)}$  leképezések egy  $\tilde{\varphi} : M_1 \rightarrow M_2$  szürjektív  $S$ -homomorfizmust indukálnak, ahol  $\sigma_\ell$  az  $\mathcal{N}_1$   $\ell$  egyeneséhez tartozó Bol-tükrözés. Fordítva, egy  $M_1 \rightarrow M_2$   $S$ -homomorfizmus egy irány- és illeszkedéstartó leképezést definiál az  $\mathcal{N}(M_1, S)$  és  $\mathcal{N}(M_2, S)$  hálózatok között.*

*Bizonyítás.* Az (i) állítás első része következik a loopművelet 1.1 ábrán szereplő geometriai definíciójából, a második rész triviális. A (ii) állításhoz elegendő meggondolni, hogy a  $\sigma_\ell$ -ek egy relációja a 3-hálózat záródási konfigurációjának felel meg, a konfiguráció  $\varphi$ -képe indukálja reláció teljesülését a  $\sigma_{\varphi(\ell)}$ -eknél. A fordított irány a 3.2.5 tételből adódik.  $\square$

A fenti állítás értelmében beszélhetünk *egyszerű 3-hálózatokról*, vagyis olyanokról, amelyek csak triviális homomorfizmusokkal bírnak. Ezek után a következő állítás adódik.

**3.2.8. Állítás.** *Ha  $L$  egy egyszerű Moufang-loop, akkor a hozzátartozó 3-hálózat is egyszerű, azaz a meghatározott  $(M_0, S)$  trialitással rendelkező csoport  $S$ -egyszerű.*  $\square$

Ahhoz hasonlóan, ahogy a (2.4) egyenlőségnél kiszámoltuk a függőleges tengelyekhez tartozó Bol-eltolásokat<sup>2</sup>, Moufang-hálózat esetén a másik két irányhoz tartozó eltolásokat is kiszámolhatjuk. Azt kapjuk, hogy az  $M_0$  csoportot a (3.1) sorban szereplő kollineációk generálják. Most mindhárom irányhoz

<sup>2</sup>Bol-eltolásnak a két párhuzamos tengelyre történő tükrözés szorzatát nevezzük.

definiálhatunk egy  $\Phi_i : M_0 \rightarrow M(L)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) szürjektív homomorfizmus, amely a kollineációk adott egyenesosztályon vett hatását tekinti.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a 3-hálózatunk a  $K$  egyszerű csoporttal koordinátázható. A 4.1.6 tétel bizonyításának módszerével megmutatható, hogy  $K_i = \ker \Phi_i \cong K' = K$ ,

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(id, \rho_a); a \in K\} \\ K_2 &= \{(\lambda_a, id); a \in K\} \\ K_3 &= \{(\rho_a^{-1}, \lambda_a); a \in K\}. \end{aligned}$$

Nyilván  $K_i \cap K_j = \{1\}$  és  $\Phi_1(K_2 K_3) = M(K)$ , így  $M_0 = K_1 K_2 K_3 \cong K \times K \times K$ . Az  $S_3$  pedig a komponensek permutálásával hat  $K^3$ -n, azaz  $M \cong K \wr S_3$ .

Részletesebb számolással adódik az az eset, amikor a hálózat koordináta-loopja egy nem-asszociatív Moufang-loop.

**3.2.9. Állítás (Doro).** *Legyen  $L$  egy nem-kommutatív véges egyszerű Moufang-loop. Ha  $L$  asszociatív, akkor  $M_0 \cong L \times L \times L$  és  $M \cong L \wr S_3$ . Ha  $L$  nem-asszociatív, akkor  $M_0$  egy véges egyszerű csoport.*

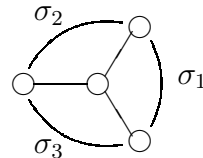
*Bizonyítás.* Ld. [Dor78, Proposition 1]. Doro bizonyításának ötletét felhasználva ezt az állítást is be lehet látni geometriai érveléssel.  $\square$

**3.2.10. Tétel (Liebeck).** *a) A trialitással rendelkező véges egyszerű csoportok pontosan a  $D_4(q)$  osztály tagjai.*

*b) Legyen  $S = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle \cong S_3$  a  $G = D_4(q)$  csoport automorfizmusainak egy csoportja úgy, hogy a  $(G, S)$  pár csoport trialitással. Ekkor  $S$  a  $D_4(q)$  csoport gráf-automorfizmusából áll.*

*Bizonyítás.* Ld. [Lie87, Proposition és Theorem 4.1]. A bizonyítás felhasználja a véges egyszerű csoportok osztályozását. A bizonyításban fontos szerep jut a 3.2.6 állításnak, amely szerint  $S$  elemei külső automorfizmusok.  $\square$

A  $D_4(q)$  csoport gráf-automorfizmusai:



*Megjegyzés.* Az utóbbi tételt M. Dettweiler [Det95] munkájában [Lie87]-től függetlenül, más módszerekkel szintén bebizonyította.

### 3.3. Példák egyszerű Moufang-loopokra

Az  $M_0 = D_4(q)$  esetben a loopot explicit is meg tudjuk konstruálni. Ezzel a konstrukcióval L.J. Paige [Pai56] cikkében találkozhatunk először. Paige megmutatta, hogy ha  $R$  egy nem-asszociatív egyszerű alternatív algebra, ami tartalmaz legalább egy, az egységelemétől különböző idempotens elemet, akkor  $L/Z(L)$  ( $L$  az  $R$  invertálható elemeinek halmaza) egy egyszerű Moufang-loop, vagy pedig tartalmaz egy 2 indexű normális részloopot, ami egyszerű Moufang-loop.

Legyen  $V$  egy háromdimenziós vektortér az  $F$  test felett, és jelölje „ $\cdot$ ” és „ $\times$ ” rendre a szokásos belső- és vektoriális szorzatot. Legyen  $R$  az

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{pmatrix}$$

alakú  $2 \times 2$  mátrixok halmaza, ahol  $a, b \in F$  és  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Értelmezzük  $R$ -en az

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} b & -\mathbf{u} \\ -\mathbf{v} & a \end{pmatrix}$$

konjugálást és az

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} & a\mathbf{x} + d\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{y} \\ cv + b\mathbf{y} + \mathbf{u} \times \mathbf{x} & bd + \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

szorzásműveletet. Ekkor  $(R, +, \circ)$  egy nem-asszociatív algebra, amely eleget tesz a fenti, Paige-féle feltételeknek. Továbbá az  $A \mapsto \bar{A}$  konjugálás anti-automorfizmus, és teljesül

$$A \circ \bar{A} = \det(A) \cdot \mathbf{1},$$

ahol a

$$\det(A) = ab - \mathbf{u}\mathbf{v}$$

művelet egy  $(R, \circ) \rightarrow (F, \cdot)$  morfizmus.

Tehát az invertálható elemek pontosan azok, amelyekre  $ab - \mathbf{u}\mathbf{v} \neq 0$ , ezeknek az  $L$  halmaza Moufang-loopot alkot.  $Z(L)$ , mint várható, a diagonális elemekből áll, és  $L/Z(L)$ -nek azon elemeinek  $S$  halmaza, amelyek „determinánsa” négyzet  $F$ -ben, egy maximum 2 indexű normális részloopot alkotnak. A fentiek szerint  $S$  egyszerű Moufang-loop, az általános jelölés erre a loopra  $\mathcal{M}(F)$ .

Az  $L$  loop multiplikáció-csoportja  $\mathrm{SO}_8^+(F)$ -el, a belső leképezések csoportja pedig  $\mathrm{SO}_7(F)$ -el izomorf, ahol  $\mathrm{SO}_8^+$  az  $f(A) = \det(A) = ab - u_1v_1 -$

$u_2v_2 - u_3v_3$  nem-elfajuló kvadratikus alakhoz tartozó nyolcdimenziós forgáscsoport (ld. [Fre85]).

Két esetet vizsgálunk meg. Legyen először  $F = \mathbb{F}_q$ . Az  $L/Z(L)$  elemei a konstrukció szerint azonosíthatók a 7-dimenziós  $F$  felett projektív tér azon pontjaival, amelyek nem illeszkednek az  $ab - u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3 = 0$  egyenletű kvadrikára. Ennek a kvadrikának [Hir79, Theorem 5.2.6] szerint  $(q^3 + 1)(q^4 - 1)/(q - 1)$  pontja van, tehát  $|L/Z(L)| = q^3(q^4 - 1)$ . Az  $S$  indexe 1 vagy 2 attól függően, hogy  $q$  páros vagy páratlan. Kaptuk tehát, hogy

$$|\mathcal{M}(q)| = \begin{cases} q^3(q^4 - 1), & \text{ha } q \text{ páros,} \\ \frac{1}{2}q^3(q^4 - 1), & \text{ha } q \text{ páratlan.} \end{cases}$$

**3.3.1. Tétel (Liebeck [Lie87]).** *Legyen  $M$  egy véges egyszerű Moufang-loop. Ekkor  $M$  vagy asszociatív, vagy pedig izomorf az  $\mathcal{M}(q)$  loopok valamelyikéhez.  $\square$*

Egy érdekes megjegyzés, hogy a fentiek szerint  $|\mathcal{M}(2)| = 120$ . Ismeretes azonban, hogy  $\mathcal{M}(q)$  csak 1, 2 és 3 rendű elemeket tartalmaz. Következésképp Cauchy tétele nem érvényes véges Moufang-loopok esetén.

A másik megvizsgálandó eset  $F = \mathbb{R}$ . A fenti konstrukció egy 7-dimenziós analitikus Moufang-loopot szolgáltat. Ez különbözik a klasszikus 7-dimenziós Moufang-looptól, a normált Cayley-számoktól. A Cayley-számok konstrukciója a komplex számok és a kvaterniók analógiájára történik. Legyen  $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ , és rögzítsünk egy  $\{e_0 = 1, \dots, e_7\}$  bázist. Definiáljuk a szorzást először a báziselemeken, majd terjesszük ki  $\mathbb{O}$ -ra disztributívan.

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad (i, j = 1, \dots, 7),$$

$$e_i e_j = e_k \iff e_j e_k = e_i, \quad (i, j, k = 1, \dots, 7, i \neq j),$$

$$e_1 e_3 = e_2, \quad e_2 e_6 = e_4, \quad e_4 e_5 = e_1, \quad e_3 e_6 = e_5, \quad e_1 e_7 = e_6, \quad e_2 e_7 = e_5, \quad e_4 e_7 = e_3.$$

A kapott  $(\mathbb{O}, +, \cdot)$  algebra a Cayley-számok osztásgyűrűje.

Mint ismeretes, a komplex számok megalkotásánál a valós test teljes rendezettségét elveszik. A komplex testből a kvaterniók ferdetestjébe való át-téréskor a szorzásművelet kommutativitása tűnik el, míg a kvaternióktól a Cayley-számok osztásgyűrűjébe való továbblépéskor a szorzás asszociativitása is megszűnik, a multiplikatív struktúra egy (modulo centrum egyszerű) Moufang-loopot alkot. Az általánosított Frobenius-tétel szerint ez a folyamat nem folytatható (vö. [Fri81, 251. oldal] valamint [Fre85, 1.5.14. Hurwitzscher Satz] és [Lie87]).

## 4. fejezet

# Speciális looposztályok

Ebben a fejezetben Bol-loopoknak speciális osztályaival foglalkozunk. Ezen osztályok egyik része azonosságokkal definiálható, másik részük pedig konkrét konstrukciókhoz kapcsolódik.

A 4.1 alfejezetben a *bal konjugált zárt* és a *Burn-loopok* osztályát definiáljuk. Az alfejezet minden állítása a saját eredményünk, kivéve a 4.1.2 állítás (iii) pontját, mely az [NS94] cikkben már szerepel. Ezek az eredmények a [Nag94] és [Nag98a] cikkekben kerültek publikálásra, a pontos hivatkozások a bizonyítások elején találhatóak.

A 4.2 alfejezetben részletesen leírjuk a [Bur78, Bur81]-ben megadott loopkonstrukciókat. Ezek a konstrukciók az előző alfejezetben vizsgált looposztályba tartoznak, az ottani eredményeink felhasználásával explicit kiszámoljuk a loopokhoz, illetve az általuk meghatározott 3-hálózatokhoz tartozó automorfizmus- és kollineációcsoportokat. A fő eredmények a 4.2.3, 4.2.6 és 4.2.8 tételek, ezek mindegyike szerepel a [Nag98a] cikkben.

A 4.3 alfejezetben 2 exponensű Bol-loopokat vizsgálunk. Mint kiderül, ezek a loopok is a Burn-féle osztályba tartoznak. Ilyen loopokra viszonylag kevés példa ismert, ezek mindegyike származtatható a [KK95] cikkbeli konstrukcióból, amelyet behatóan megvizsgálunk. A loopok eltoláscsoportjaira vonatkozó eredmények nem újak, a 4.3.1 tétel viszont egy még publikálatlan saját eredmény.

A 4.4 alfejezetben tárgyalt Bol-féle univerzális 2-loop tulajdonságot az előző alfejezetben vizsgált loopok motiválják. Az alfejezetben a [Nag98b] cikkben publikált eredményeinket ismertetjük, kivéve a publikálatlan 4.4.5 tételt. Ez a tétel teremt kapcsolatot az előző alfejezet 4.3.1 tétele és az alfejezetek végén megfogalmazott három nyitott kérdés között.

## 4.1. Bal konjugált zárt és Burn-féle loopok

**4.1.1. Definíció.** Az  $(L, \cdot)$  loopot bal konjugált zártnak nevezzük, ha az  $S(L)$  bal oldali szelés invariáns a  $G(L)$  bal oldali eltoláscsoportban. A bal konjugált zárt Bol-loopokat Burn-loopoknak is nevezzük.

A teljesség kedvéért említést teszünk a *konjugált zárt* loopok fogalmáról, ezek azok, ahol *mindkét* oldali metszet invariáns halmaz az  $M(L)$  multiplikációcsoportban. Ilyen loopokat elsőként a [GR90] cikkben vizsgálták, ahol többek között megmutatták, hogy ezek a loopok a már említett  $G$ -loopok osztályába (ld. az 1.4.4 állítás utáni megjegyzést) tartoznak. Bal konjugált zárt és Burn-loopok vizsgálatával először a [NS94] cikkben foglalkoztak, az utóbbi elnevezés is innen származik.

Egy további megjegyzés, hogy a 2.5. alfejezetben definiált 8-adrendű Bol-loop  $B_8$ -hoz izomorf.

**4.1.2. Állítás.** (i) Egy bal inverz tulajdonságú loopban a bal oldali és a középső nukleusz megegyezik.

(ii) Egy (bal) Bol-loopban a bal oldali (=középső) nukleusz normális rész-loop.

(iii) Az  $(L, \cdot)$  Bol-loop akkor és csak akkor Burn-féle, ha minden elem négyzete benne van a bal oldali nukleuszban.

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned}
 n \in N_\mu &\iff xn \cdot y = x \cdot ny && \forall x, y \in L \\
 &\iff \lambda_x \lambda_n \in S(L) && \forall x \in L \\
 &\iff \lambda_{n^{-1}} \lambda_x \in S(L) && \forall x \in L \\
 &\iff n^{-1}x \cdot y = n^{-1} \cdot xy && \forall x, y \in L \\
 &\iff n^{-1} \in N_\lambda \iff n \in N_\lambda.
 \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk (i)-et. (ii) is könnyen adódik, ha meggondoljuk, hogy az  $(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$  Bol-azonosság a  $\lambda_x \rho_{xz} = \rho_z \lambda_x \rho_x$  egyenlőséggel is leírható, ami átalakítva  $\rho_{xz} \rho_x^{-1} = \lambda_x^{-1} \rho_z \lambda_x$ . Ez mutatja, hogy  $M(L)$ -ben a  $G_{\text{bal}}(L)$  normalizálja  $G_{\text{jobb}}(L)$ -et, azaz  $G_{\text{jobb}}(L) \triangleleft M(L)$ . Ebből következik, hogy  $C_M(G_{\text{jobb}}) \triangleleft M$ , de 1.2.8 állítás szerint

$$C_M(G_{\text{jobb}}) = \{\lambda_n; n \in N_\lambda\},$$

s így  $N_\lambda = C_M(G_{\text{jobb}})(1) \triangleleft L$  a 1.2.4 állítás alapján.

(iii)-hez rögzítsünk egy  $x \in L$  tetszőleges elemet, ekkor

$$\lambda_{x^2} S = \lambda_x^2 \lambda_x^{-1} S \lambda_x^{-1} = \lambda_x S \lambda_x^{-1},$$

azaz minden  $x \in L$  esetén  $x^2 \in N_\lambda$  pontosan akkor teljesül, ha  $\lambda_x S \lambda_x^{-1} = S$ .  
□

*Megjegyzés.* Az állítás (i) részét ld. [Nag94, Proposition 2.1.]-ben. Az (i) és (ii) állítások régóta ismertek Moufang-loopok esetében, ott a dualitás miatt a jobb és a bal oldali nukleusz szerepe persze felcserélhető (vö. [Pfl90, I.4.3. Theorem]). Ezzel szemben [RR93]-ban D.A. ROBINSON és K.H. ROBINSON olyan Bol-loopot konstruáltak, amelyben a nukleuszok  $N = N_\lambda \cap N_\rho$  metszete nem normális részloop. Az (iii) rész némileg pontatlanabb formában már [NS94]-ban is megtalálható.

**4.1.3. Állítás.** *Az  $(L, \cdot)$  loop akkor és csak akkor bal konjugált zárt, ha minden  $a \in L$  elemre a  $\rho_a^{-1} \lambda_a$  leképezés jobb pszeudo-automorfizmus a kísérőelemmel. Ez a tulajdonság ekvivalens azzal, hogy minden  $a \in L$  esetén  $(\rho_a^{-1} \lambda_a, \lambda_a)$  az  $L$ -hez társított 3-hálózat egy iránytartó kollineációja.*

*Bizonyítás.* (Ld. [Nag94, Proposition 2.7].) Tekintsük a

$$\rho_a^{-1} \lambda_a(x) \cdot (\rho_a^{-1} \lambda_a(y) \cdot a) = ax/a \cdot ay, \quad \rho_a^{-1} \lambda_a(xy) \cdot a = a \cdot xy$$

egyenlőségeket. A  $z = ay$  helyettesítés után azt látjuk, hogy  $\rho_a^{-1} \lambda_a$  pontosan akkor jobb pszeudo-automorfizmus  $a$  kísérőelemmel, ha minden  $x, z \in L$  elemre teljesül  $ax/a \cdot z = a \cdot (x \cdot a \setminus z)$ . Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy minden  $a, x$  elemre  $\lambda_a \lambda_x \lambda_a^{-1} \in S(L)$ , vagyis azzal, hogy  $L$  bal konjugált zárt. Az állítás utolsó része az 1.4.2 állításból következik. □

**4.1.4. Állítás.** *Legyen  $\mathcal{N}$  egy bal konjugált zárt  $L$  loop által koordinátázott 3-hálózat és jelöljük  $\Gamma$ -val az  $\mathcal{N}$  teljes iránytartó kollineációcsoportját. Ekkor az origó  $\Gamma$  alatti pályája függőleges egyenesek uniója.*

*Bizonyítás.* (Ld. [Nag94, Corollary 2.8].) A 4.1.3 állítás szerint minden  $a \in L$  elemre  $(\rho_a^{-1} \lambda_a, \lambda_a)$  iránytartó kollineáció. Az ezen kollineációk által generált csoport fixen hagyja az  $y$ -tengelyt és tranzitívan hat rajta, tehát az  $y$ -tengely része az origó pályájának. Tegyük fel, hogy  $P$  a pálya egy tetszőleges pontja. Ez azt jelenti, hogy létezik egy iránytartó kollineáció, amely a jelenlegi origót  $P$ -be viszi. Az 1.4.4 állítás szerint a  $P$ -hez mint origóhoz tartozó koordinátaloop  $(L, \cdot)$ -tal izomorf, tehát bal konjugált zárt, és az előbbi okfejtés szerint a  $P$ -re illeszkedő függőleges egyenes része az origó pályájának. □

Az alfejezet hátralévő részében a 2.2.2 tételben szereplő  $\Phi$  homomorfizmus magját leíró állításokat bizonyítunk. A továbbiakban végig a 2.2.2 tétel

jelöléseit használjuk, egyetlen módosítással. A  $\ker \Phi$  kollineáció-csoport definíció szerint rögzíti az összes vízszintes egyenest, ezért  $\ker \Phi$ -t természetes módon azonosíthatjuk a függőleges egyenesek halmazán vett hatásával. Azaz minden elemét azonosítjuk az őt megadó permutációpár első elemével.

**4.1.5. Állítás.** *Tekintsünk egy  $L$  Bol-loop által koordinátázott 3-hálózatot, és használjuk a 2.2.2 tétel jelöléseit.*

- (i) *Ha  $L$ -ben a  $J : x \rightarrow x^{-1}$  inverzképzés művelete jobb pszeudo-automorfizmus, akkor  $\ker \Phi = \{id\}$ .*
- (ii) *Általában, a fenti azonosítással  $\ker \Phi = \cup_k H_k$ , ahol*

$$H_k = \langle [\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_k}]; x_1, \dots, x_k \in L, n \leq k, \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_k} \in S(L) \rangle.$$

*Teljesül továbbá  $\ker \Phi \triangleleft G(L)$ .*

*Bizonyítás.* (i) (Ld. [Nag94, Proposition 2.5].) Tegyük fel, hogy  $J$  jobb pszeudo-automorfizmus és tekintsük  $\ker \Phi$  egy tetszőleges  $(\alpha, id)$  elemét. Ekkor  $(\alpha, id) \in N_{x\text{-teng}}$ , és a 2.3.3 tétel szerint  $\alpha(c) = c$ . De az 1.5.3 tétel szerint  $\alpha = \lambda_n$  valamely  $n \in N_\lambda$  elemre. Ez csak  $n = 1$  esetén lehetséges, azaz  $\alpha = id$ .

- (ii) (Ld. [Nag98a, Lemma 2].)  $\ker \Phi$  egy általános eleme

$$(\alpha, id) = (\lambda_{x_0} \rho_{x_0} \cdots \lambda_{x_k} \rho_{x_k}, \lambda_{x_0}^{-1} \cdots \lambda_{x_k}^{-1})$$

alakú.  $\lambda_{x_k} \cdots \lambda_{x_0} = id$  miatt  $x_k \cdot (\dots \cdot (x_2 \cdot x_1 x_0) \dots) = 1$  és  $\lambda_{x_0} = \lambda_{x_1}^{-1} \cdots \lambda_{x_k}^{-1}$ . A korábban már használt  $\lambda_x \rho_{xy} = \rho_y \lambda_x \rho_x$  azonosság többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_{x_0} \rho_{x_0} \cdots \lambda_{x_k} \rho_{x_k} &= \lambda_{x_0} \cdots \lambda_{x_k} \rho_{x_k \cdot (\dots \cdot (x_2 \cdot x_1 x_0) \dots)} \\ &= \lambda_{x_0} \cdots \lambda_{x_k} \\ &= \lambda_{x_1}^{-1} \cdots \lambda_{x_k}^{-1} \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_k} \\ &= [\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_k}]. \end{aligned}$$

A bal inverz tulajdonság miatt az  $x_1, \dots, x_n \in L$  elemekhez pontosan akkor létezik egy  $x_0$ , amelyre  $\lambda_{x_0} \cdots \lambda_{x_k} = id$ , ha  $\lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_k} \in S(L)$ . Ezzel az állítás első részét beláttuk.

A második részhez gondoljuk meg, hogy  $\ker \Phi$  egy  $(\lambda_n, id)$  eleme esetén a ferde egyenesen vett hatás  $\lambda_n$ , (ld. az 1.4.2 állítást), azaz megegyezik a függőleges egyeneseken vett hatással. Az  $N_0$ -at generáló  $(\lambda_x \rho_x, \lambda_x^{-1})$  kollineációk ferde egyenesen vett hatása  $\lambda_x$ . Azaz,  $N_0$  úgy hat a ferde egyenesek halmazán, mint  $G(L)$   $L$ -en, és  $\ker \Phi \triangleleft N_0$  pedig úgy, mint  $\ker \Phi$  a fenti azonosítással. Tehát az azonosítás után  $\ker \Phi \triangleleft G(L)$ .  $\square$



**4.1.6. Tétel.** *Legyen  $L$  egy véges Burn-loop és használjuk a fejezet eddigi jelöléseit.*

- (i)  $\ker \Phi = H_s$ , ahol  $s = \max\{|L : N_\lambda| - 1, 2\}$ .  
(ii) Ha  $s \leq 7$ , akkor  $s \in \{2, 3\}$  és

$$\ker \Phi = [S(N_\lambda), G(L)] = \langle [\lambda_n, \lambda_x] \mid n \in N_\lambda, x \in L \rangle.$$

*Speciálisan,  $\ker \Phi = L'$ , ha  $L$  csoport.*

*Bizonyítás.* (Ld. [Nag98a, Proposition 1 és az azt követő Corollary].) (i) Legyen  $L$  egy véges Burn-loop. Ekkor minden  $n \in N_\lambda$  és  $x, y \in L$  elemre  $[\lambda_n, \lambda_x], [\lambda_x^2, \lambda_y] \in H_2$ . Ennek felhasználásával könnyen beláthatók az alábbi azonosságok.

Legyen  $\alpha_i \in S(L)$  és  $\bar{\alpha}_i \in S(N_\lambda)$ .

1.  $[\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k] \equiv [\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i^{\alpha_{i+1}}, \dots, \alpha_k] \pmod{H_2}$ ;
2.  $[\alpha_1, \dots, (\alpha_i \bar{\alpha}_i), \dots, \alpha_k] \equiv [\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \alpha_i, \dots, \alpha_k] \pmod{H_2}$ ;
3.  $[\alpha_1 \cdots \alpha_k, \bar{\alpha}_i] \in H_2$ ;
4.  $[\alpha_1, \dots, \alpha_i, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_k] \equiv [\alpha_1, \dots, \alpha_k] \pmod{H_2}$ .
5. Ha az 1., 2. vagy 4. relációk egyik oldala eleme  $H_k$ -nak, akkor a másik oldal is.

A 4. reláció bizonyításánál a 3. relációt használjuk. Az 5. kijelentés  $H_2 \triangleleft H_k \triangleleft G(L)$ -ből következik.

Ha  $L = N_\lambda$ , azaz  $L$  csoport, akkor minden  $x, y \in L$  esetén  $\lambda_x \lambda_y \in S(L)$ , tehát  $\ker \Phi = L' = H_2 = H_3 = \dots$ . Tegyük tehát fel, hogy  $|L : N_\lambda| \geq 2$  és rögzítsünk  $N_\lambda$   $L$ -beli mellékosztályainak egy  $B$  reprezentáns-rendszerét úgy, hogy  $1 \in B$ . Vegyük  $L$ -nek tetszőleges  $x_1, \dots, x_k$  elemeit, melyekre  $\lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_k} \in S(L)$ . Minden elemet  $x_i = n_i b_i$  alakba írhatunk, ahol  $n_i \in N_\lambda$  és  $b_i \in B$ . A fenti 2. és 4. pont szerint  $[\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_k}] \equiv [\lambda_{b_1}, \dots, \lambda_{b_k}] \pmod{H_2}$ . A fenti azonosságok és  $b_i^2 \in N_\lambda$  többszöri felhasználásával  $[\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_k}] \equiv [\lambda_{b'_1}, \dots, \lambda_{b'_m}] \pmod{H_2}$  adódik, ahol  $b'_1, \dots, b'_m$  a  $B \setminus \{1\}$  különböző elemei. Továbbá  $\lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_k} = \lambda_{b'_1} \cdots \lambda_{b'_m} \lambda_n$  valamely  $n \in N_\lambda$  elemre, azaz  $\lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_k} \in S(L)$  miatt  $\lambda_{b'_1} \cdots \lambda_{b'_m} \in S(L)$  is teljesül. Ekkor viszont  $[\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_k}] \in H_m$  ( $m \leq |B| - 1$ ).

(ii) Az  $L/N_\lambda$  legfeljebb 7 rendű 2 exponensű Bol-loop, vagyis egy elemi Abel-féle 2-csoport (ld. [Bur78]). Az  $s = 1$  eset triviális,  $s = 2$  nem fordulhat elő. Tegyük fel, hogy  $s = 4$  és legyen  $B = \{1, a, b, ab\}$ . Ekkor minden  $x \in L$  elem  $x = a^i b^j \cdot n$  alakban írható. Tegyük fel, hogy  $\lambda_a \lambda_b \in S(L)$ . Ekkor  $\lambda_a^i \lambda_b^j \in$

$S(L)$  és minden  $x = a^i b^j \cdot n$  elemre  $\lambda_a \lambda_x = \lambda_a^{i+1} \lambda_b^j \in S(L)$ . Ez azt jelenti, hogy  $a \in N_\lambda$ , ami ellentmondás. Ezek miatt viszont  $\lambda_a \lambda_b \lambda_{ab} \in S(L)$  sem lehetséges, hisz ekkor  $\lambda_a \lambda_b \lambda_{ab} = \lambda_n$  kellene fennálljon, amiből  $\lambda_a \lambda_b \in S(L)$  következik. Így tehát  $\ker \Phi$  generátorai között csak  $[\lambda_n, \lambda_x]$  alakú elemek jönnek szóba.  $\square$

## 4.2. Burn-konstrukciók és csoportinvariánsaik

Egy loopot megadhatunk tisztán csoportelméleti módszerekkel is, a bal oldali eltoláscsoport felhasználásával. Ez a megadási mód a következő észrevételen alapszik. Ha az  $(L, \cdot)$  loopnál  $G(L)$ -et  $L$ -en ható permutációcsoportként tekintjük, az  $S(L)$  szelés permutációk egy élesen tranzitív halmaza.<sup>1</sup> Tekintsük most az  $S$  élesen tranzitív halmazt a  $G$  csoportban. Rögzítsünk egy  $e \in L$  elemet. Ekkor  $S(L)$  elemeit megindexelhetjük  $L$  elemeivel az  $s_x(e) = x$  elv alapján. Most definiálhatunk egy műveletet  $L$ -en:  $x \cdot y = s_x(y)$ . Ezzel a művelettel  $(L, \cdot)$  akkor és csak akkor loop, ha  $id \in S$ . Ekkor ugyanis  $e$  egységelem, az  $ax = b$  megoldása nyilván  $x = a \setminus b = s_a^{-1}(b)$ , és  $xa = b$  megoldása az az  $S$  éles tranzitivitása miatt egyértelműen meghatározott  $x$  elem, amelyre  $s_x(a) = b$ .

Legyen most  $G$  tetszőleges csoport  $U \leq G$  részcsoporthalmozattal és  $S \subset G$  részhalmazzal. Tegyük fel, hogy  $S$  rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.

(S1)  $S$  az  $U$  jobb oldali mellékosztályainak reprezentáns rendszere.

(S2)  $id \in S$ .

(S3)  $S$  Bol-típusú, azaz minden  $s, t \in S$  esetén  $st^{-1}s \in S$ .

Ekkor  $S$  egy, az  $L = G/U$  mellékosztály-rendszeren ható élesen tranzitív halmaz, amely egy Bol-loopot határoz meg  $e = U$  egységelemmel. Valóban, (S1) miatt  $S$  indexelhető  $L$  elemeivel úgy, hogy  $s_x(e) = x$  ( $x \in L$ ). Rögzítsük most az  $a, b \in L$  elemeket, és legyen  $ab = s_a(b)$ . Az előbbieket szerint

$$(s_a^{-1} s_{ab} s_a^{-1})(a) = (s_a^{-1} s_{ab})(e) = s_a^{-1}(ab) = b,$$

viszont (S2) és (S3) miatt  $s_a^{-1} s_{ab} s_a^{-1} \in S$ , létezik tehát  $s \in S$  elem, amelyre  $s(a) = b$ . Tegyük fel, hogy a  $t \in S$  elem szintén bír ezzel a tulajdonsággal. Ekkor az  $st^{-1}s$  és  $s$  elemek  $U$ -nak ugyanabban a mellékosztályában állnak, (S1) miatt  $st^{-1}s = s$ , azaz  $s = t$  teljesül. Tehát  $S$  valóban élesen tranzitív halmaz.

---

<sup>1</sup>Vagyis minden  $x, y \in L$  elempárra pontosan egy  $s \in S(L)$  elem található, amelyre  $s(x) = y$ .

Ezek után megadjuk az R.P. Burn névéhez fűződő looposztályok konstrukcióját. A leírásunk némileg különbözik az eredetitől, de a vele való ekvivalencia könnyen belátható.

**A  $B_{4n}$  loopok ( $n \geq 2$ ):** Tekintsük az  $\alpha, \beta, \gamma$  elemek és a  $\alpha^{2n} = \beta^2 = \gamma^2 = (\alpha\beta)^2 = id, \beta\gamma = \gamma\beta$  relációk által generált  $G_{8n}$  csoportot.  $G_{8n}$  nyilván izomorf  $D_{4n} \times Z_2$ -hoz, ahol  $D_{4n} = \langle \alpha, \beta \rangle$   $4n$ -rendű diédercsoport és  $Z_2 = \langle \gamma \rangle$ . Jelölje  $B_{4n}$  a  $\langle \beta \rangle$  részcsoport jobb oldali mellékosztályainak halmazát és definiáljuk a az  $S(B_{4n})$  szelést mint

$$S(B_{4n}) = \{\alpha^{2i}, \alpha^{2j+1}\beta, \alpha^k\beta\gamma; i, j \in \mathbb{Z}_n, k \in \mathbb{Z}_{2n}\}.$$

Ekkor minden  $n \geq 2$  esetén  $S(B_{4n})$  kielégíti az (S1), (S2), (S3) feltételeket, a fent ismertetett módon  $B_{4n}$ -en értelmezett művelet egy valódi Bol-loopot határoz meg.

**A  $C_{4n}$  loopok,  $n \geq 2$  páros:** Tekintsük a

$$H_{8n} = \langle \alpha, \beta, \gamma; \alpha^{2n} = \beta^2 = \gamma^2 = (\alpha\beta)^2 = id, \alpha\gamma = \gamma\alpha, \beta\gamma = \gamma\beta\alpha^n \rangle$$

csoportot. Legyen  $C_{4n}$  a  $\langle \beta \rangle$  részcsoport jobb oldali mellékosztályainak halmaza és definiáljuk az

$$S(C_{4n}) = \{\alpha^{2i}, \alpha^{2j+1}\beta, \alpha^k\beta\gamma; i, j \in \mathbb{Z}_n, k \in \mathbb{Z}_{2n}\}$$

szelést, amely  $C_{4n}$ -en az előzőhöz hasonlóan egy valódi Bol-loopot határoz meg (ld. [Bur81]).

A két  $S(B_{4n})$  és  $S(C_{4n})$  szelés esetén, a Bol-tulajdonság leellenőrzését nagyban leegyszerűsíti az az észrevétel, hogy pontosan a  $\lambda_x = \alpha^{2i}$  elemekre teljesül  $\lambda_x S(L) = S(L)$ . Ez azt jelenti, hogy a  $B_{4n}$  és  $C_{4n}$  loopok bal nukleuszának elemeihez tartozó eltolások

$$S(N_\lambda) = \{\alpha^{2i}; i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Ez után a Bol-tulajdonságot már csak az  $\alpha\beta, \beta\gamma$  és  $\alpha\beta\gamma$  elemekre kell ellenőrizni. Hasonló módszerrel az is könnyen meggondolható, hogy a két szóbanforgó  $S(B_{4n})$  és  $S(C_{4n})$  szelés invariáns halmaz a  $G_{8n}$  illetve  $H_{8n}$  bal oldali eltoláscsoportban, vagyis a  $B_{4n}$  és  $C_{4n}$  loopok Burn-loopok.

Az alfejezet hátralevő részében a [Nag98a] cikk azon eredményeit ismer-tjük, amelyek pontosan meghatározzák a fejezet elején megadott  $B_{4n}$  és  $C_{4n}$  loopokhoz tartozó automorfizmus- és kollineáció-csoportokat. Vezessük be a  $p_x = \rho_x^{-1}\lambda_x^{-1}$  jelölést. Ekkor az  $N_0$  csoport generátorai  $\sigma_1\sigma_x = (p_x, \lambda_x)$  alakban írhatók. A következő lemma segítségével kiszámítjuk az  $y$ -tengely  $N_0$  alatti pályáját.

	$B_{4n},$ $n$ páratlan	$B_{4n},$ $n$ páros	$C_{4n},$ $n \equiv 2(4)$	$C_{4n},$ $n \equiv 0(4)$
$\ker \Phi$	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_{\frac{n}{2}}$	$\mathbb{Z}_{\frac{n}{2}}$	$\mathbb{Z}_{\frac{n}{2}}$
$ N_0(y\text{-tengely}) $	$n$	$\frac{n}{2}$	$n$	$\frac{n}{2}$

4.1. táblázat.  $\Phi$  magja és az  $y$ -tengely pályája  $N_0$  alatt

**4.2.1. Lemma.** *Legyen  $(L, \cdot)$  egy Burn-loop és definiáljuk a*

$$F = \langle p_x; x \in L \rangle, \quad U = \langle \lambda_x^2; x \in L \rangle$$

*csoportokat. Ekkor az  $F(1)$  és  $U(1)$  pályák egybeesnek. Speciálisan,  $F(1) \subseteq N_\lambda$ .*

*Bizonyítás.* Felhasználva, hogy  $S(L)$  konjugált zárt kapjuk, hogy

$$(p_{y_1} \dots p_{y_k})(1) = (\lambda_{y_1}^{-1} \dots \lambda_{y_k}^{-2} \dots \lambda_{y_1}^{-1})(1) = (\lambda_{y'_k}^{-2} \dots \lambda_{y'_1}^{-2})(1) \in U(1),$$

ami azt jelenti, hogy  $F(1) \subseteq U(1)$ . Másrészt pedig

$$(\lambda_z^2 p_{y_1} \dots p_{y_k})(1) = (\lambda_z \lambda_{y'_1}^{-1} \dots \lambda_{y'_k}^{-2} \dots \lambda_{y'_1}^{-1} \lambda_z)(1) = (p_z^{-1} p_{y'_1} \dots p_{y'_k})(1) \in F(1),$$

ami azt mutatja, hogy  $F(1)$  invariáns  $U$  alatt. Tehát  $F(1) = U(1)$ .  $\square$

**4.2.2. Lemma.** *Legyen  $(L, \cdot)$  egy Burn-loop és legyen  $U \leq G(L)$  egy olyan Abel-csoport, amely tartalmazza az összes bal nukleusz elemhez tartalmazó eltolást. Ekkor a  $\Phi^{-1}(U)$  kollineáció-csoport is Abel-féle.*

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy tetszőleges  $(u, v) \in \Phi^{-1}(U)$  kollineációt. Az 1.4.2 állítás szerint  $(u, v)$  ferde egyeneseken vett hatása  $\lambda_a v$ , ahol  $a = u(1)$ , s így a 4.2.1 miatt  $a \in N_\lambda$ . Ebből következik, hogy  $\lambda_a \in U$  és  $\lambda_a v \in U$ . Mivel azonban  $U$  Abel-csoport, ez azt jelenti, hogy a  $\Phi^{-1}(U)$  kommutátor-elemei triviálisan hatnak a vízszintes és a függőleges egyenesek halmazán, tehát az egész ponthalmazon is.  $\square$

Az alfejezet hátralevő részében a [Nag98a] cikk azon eredményeit ismer-tetjük, amelyek pontosan meghatározzák a fejezet elején megadott  $B_{4n}$  és  $C_{4n}$  loopokhoz tartozó automorfizmus- és kollineáció-csoportokat. Gondoljuk meg, hogy a 4.1 táblázat a helyes értékeket tartalmazza. Mint láttuk,

mind  $B_{4n}$ -ben mind pedig  $C_{4n}$ -ben, a bal nukleusz elemeihez tartozó eltolások pontosan az  $\{\alpha^{2i}; i = 1, \dots, n\}$  elemek. Tehát  $N_\lambda \cong \mathbb{Z}_n$ , és a 4.1.6(ii) tétel szerint kiszámolva  $\ker \Phi$  a 4.1 táblázatban szereplő értékeket veszi fel.

Az  $y$ -tengely pályájára vonatkozóan a 4.2.1 lemmát használjuk. A lemma jelöléseivel elmondhatjuk, hogy az  $N_0(y$ -tengely)  $x$ -tengelyre vett vetülete pont az  $F(1) = U(1)$  halmazt adja. Az  $U$  pedig a megfelelő méretű ciklikus csoport, mint az a  $B_{4n}$  és  $C_{4n}$  loopok szelésének relációból könnyen kiszámítható.

Ezzel be is láttuk a következő tétel első állítását.

**4.2.3. Tétel.** *Legyen  $(L, \cdot)$  a  $B_{4n}$  vagy  $C_{4n}$  ( $n \geq 2$ ) loopok valamelyike. Ekkor*

$$\ker \Phi \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_n & L = B_{4n} \text{ és } n \text{ páratlan,} \\ \mathbb{Z}_{\frac{n}{2}} & \text{különben.} \end{cases}$$

Továbbá  $N_0 = \ker \Phi \rtimes \bar{G}$ , ahol  $\Phi$  izomorfizmust indukál a  $\bar{G} \leq N_0$  részcsoport és  $G(L)$  között. Jelöljük  $\bar{G}$  megfelelő generátorait  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  és  $\bar{\gamma}$ -val, és  $\delta$ -val a ciklikus  $\ker \Phi$  generátorát. Ekkor  $\bar{\alpha}$  és  $\bar{\gamma}$  triviálisan hat  $\ker \Phi$ -n, és  $\bar{\beta}\delta\bar{\beta} = \delta^{-1}$ .

*Bizonyítás.* (Ld. [Nag98a, Theorem 3 és Table 1].) Ha  $L$  a  $B_{4n}$ ,  $n \geq 2$  vagy  $C_{4n}$ ,  $n \equiv 0 \pmod{4}$  loopok valamelyikével izomorf, akkor a 4.1 táblázat szerint  $\ker \Phi$  regulárisan hat az  $N_0(y$ -teng) pályán. Vagyis ebben az esetben  $\bar{G} = N_{y\text{-tengely}}$  választással  $N_0$  valóban  $\ker \Phi \rtimes \bar{G}$  szemidirekt szorzatként írható fel.

Tegyük most fel, hogy  $L = C_{4n}$ ,  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Legyen  $m = \alpha^2(1)$ . Ekkor  $m$  rendje  $n$   $L$ -ben,  $m$  a  $N_\lambda$  ciklikus csoport egy generátora, és feltehetjük, hogy a  $\ker \Phi$  egy  $\delta$  generátora  $(\lambda_m^{-2}, id)$  alakú. Legyen  $X$  az  $x = 1$  és az  $x = m^{\frac{n}{2}}$  egyenletű függőleges egyenesekből álló halmaz. Definiáljuk a  $\bar{G}$  csoportot, mint az  $X$  halmaz stabilizátorát  $N_0$ -ban. A  $\beta\gamma$  elem bal eltolás  $C_{4n}$ -ben, tekintsük a hozzátartozó  $(p_a, \lambda_a)$   $N_0$ -generátort. Mivel  $p_a(1) = (\beta\gamma)^2(1) = \alpha^n(1) = m^{\frac{n}{2}}$ , ez a generátor felcseréli az  $X$  két egyenesét. Ezért  $|\bar{G} : N_{0,y\text{-teng}}| = 2$  és  $|N_0 : \bar{G}| = n/2$ . Ebből következik, hogy  $\bar{G} \cap \ker \Phi = \{id\}$ , s így  $\bar{G}$  transversális  $\ker \Phi$ -hez.

A bizonyítás befejezéséhez megvizsgáljuk  $\bar{G}$  hatását  $\ker \Phi$ -n. Alkalmazzuk a 4.2.2 lemmát az  $U = \langle \alpha, \gamma \rangle$  csoportra, és azt kapjuk, hogy  $\bar{\alpha}$  és  $\bar{\gamma}$  kommutál  $\ker \Phi$ -vel. Továbbá  $L$  bármely választása esetén  $\bar{\beta} \in N_{y\text{-teng}}$ , tehát  $\bar{\beta} = (\beta, \beta) \in N_{0,(1,1)}$  és  $\delta^{\bar{\beta}} = \delta^{-1}$ . □

A következő tétel a loopok automorfizmus-csoportját írja le. Ez a tétel abban az értelemben kilóg a sorból, hogy az eddig tárgyalt csoportokkal ellentétben a loop automorfizmus-csoportja nem izotópia-invariáns.<sup>2</sup> Legyen

---

<sup>2</sup>Már a pseudo-automorfizmusok 1.4.3 definíciójánál látható, hogy  $L$  automorfizmusai

$(L, \cdot)$  egy loop  $u$  pedig az  $L$  egy automorfizmusa. Az  $u\lambda_x u^{-1} = \lambda_{u(x)}$  konjugálás útján  $u$  a  $G(L)$  csoport egy automorfizmusát indukálja amely invariánsan hagyja az  $S(L)$  szelést és a  $G(L)_1$  stabilizátor részcsoportot. Fordítva, legyen  $u$  a  $G(L)$  csoport egy automorfizmusa, amely a  $G(L)_1$  részcsoportot és az  $S(L)$  halmazt normalizálja. Ekkor  $u$  a  $G(L)_1$  szerinti mellékosztályokon, azaz  $L$ -en egy permutációt indukál, amely fixen hagyja 1-et. Továbbá minden  $x \in L$  esetén  $u\lambda_x u^{-1} = \lambda_y$  valamely  $y$ -ra. Mindkét oldalt 1-re alkalmazva kapjuk, hogy  $y = u(x)$ , vagyis  $u\lambda_x u^{-1} = \lambda_{u(x)}$  és  $u \in \text{Aut}(L)$ .

Az általunk vizsgált  $B_{4n}$  és  $C_{4n}$  loopok mindegyike esetén az 1 stabilizátora  $\{id, \beta\}$ . Elsőként kiszámoljuk ennek a csoportnak az  $\text{Aut}(G)$ -beli normalizátorát, azaz  $C_{\text{Aut}(G)}(\beta)$ -t, ahol  $G$  a  $G_{8n}$  és  $H_{8n}$  csoportok valamelyike.

**4.2.4. Lemma.** *A korábbi jelöléseinket használva megállapítjuk, hogy*

$$C_{\text{Aut}(G)}(\beta) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_n^* \times S_3 & \text{ha } G = G_{8n}, n \text{ páratlan} \\ \mathbb{Z}_n^* \times D_8 & \text{ha } G = G_{8n}, n \text{ páros} \\ \mathbb{Z}_{2n}^* \times \mathbb{Z}_2 & \text{ha } G = H_{8n}, n > 2 \text{ páros} \end{cases}$$

Továbbá, minden esetben a  $C_{\text{Aut}(G)}(\beta)$  csoport elemei normalizálják a megfelelő szelést, azaz  $C_{\text{Aut}(G)}(\beta)$  izomorf a megfelelő loop automorfizmus-csoportjával.

*Bizonyítás.* 1. eset:  $G = G_{8n}$ ,  $n$  páratlan. Definiáljuk a  $G$   $A = \langle \alpha^2 \rangle$  és  $B = \langle \alpha^n, \beta, \gamma \rangle$  részcsoportjait. Mivel  $|A| = n$  páratlan,  $A$  karakterisztikus részcsoport és  $G = A \rtimes B$ . Ezenkívül  $B = Z(G)\langle \beta \rangle$  is invariáns  $C_{\text{Aut}(G)}(\beta)$ -ban. Tehát  $C_{\text{Aut}(G)}(\beta) = \text{Aut}(A) \times C_{\text{Aut}(B)}(\beta) \cong \mathbb{Z}_n^* \times S_3$ .

Másrészről pedig  $S(L) = A\{id, \alpha^n \beta, \beta \gamma, \alpha^n \beta \gamma\}$ . Mivel az

$$\{id, \alpha^n \beta, \beta \gamma, \alpha^n \beta \gamma\}$$

halmaz invariáns  $C_{\text{Aut}(B)}(\beta)$  alatt, következik az állításunk.

2. eset:  $G = G_{8n}$ ,  $n$  páros. Tekintsük az  $\alpha$  és  $\gamma$  elemek képét egy lehetséges csoport-automorfizmus alatt. A  $G_{8n}$  csoport relációinak felhasználásával megmutatható, hogy általánosan csak az

$$\alpha \mapsto \alpha^i \gamma^k, \quad \beta \mapsto \beta, \quad \gamma \mapsto \alpha^{jn} \gamma$$

eset fordul elő, ahol  $i \in \mathbb{Z}_{2n}^*$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}_2$ . Számolás útján adódik, hogy ezek a leképezések egy  $\mathbb{Z}_n^* \times D_8$ -vel izomorf csoportok alkotnak. Továbbá, mivel

---

pontosan az origót fixen hagyó kollineáció-csoportnak feleltethetők meg. Az origó különböző megválasztásakor ez a csoport általában különböző lesz.

ebben az esetben az automorfizmusokat explicit leírtuk, az is közvetlenül ellenőrizhető, hogy ezek az automorfizmusok invariánsan hagyják a szelést.

3. eset:  $G = H_{8n}$ ,  $n > 2$  páros. A fentiekhez hasonló megfontolások után kapjuk, hogy ebben az esetben  $C_{\text{Aut}(G)}(\beta)$  elemeit a

$$\alpha \mapsto \alpha^i, \quad \beta \mapsto \beta, \quad \gamma \mapsto \alpha^{jn}\gamma, \quad (i \in \mathbb{Z}_{2n}^*, j \in \mathbb{Z}_2)$$

leképezések indukálják, és minden ilyen elem invariánsan hagyja a szelést.  $\square$

*Megjegyzés.* A részletes számolásokat ld. [Nag98a, Lemma 8,9 és 10].

**4.2.5. Lemma.** *Legyen  $(L, \cdot)$  a tárgyalt loopok valamelyike. Ekkor  $L$  minden bal pseudo-automorfizmusa automorfizmus.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $u$  egy bal pseudo-automorfizmus  $c$  kísérőelemmel, azaz minden  $x, y \in L$  elemre teljesül

$$(c \cdot u(x)) \cdot u(y) = c \cdot u(xy).$$

Ezt kifejezhetjük az  $\lambda_{cu(x)}u = \lambda_c u \lambda_x$  azonossággal is, amiből  $uS(L)u^{-1} = \lambda_c^{-1}S(L)$  következik.

A következő eredmények [Bur81]-ből származnak. Ha  $L = B_{4n}$ , akkor az  $L$  főizotópjainak az alábbi négy szelés szerinti reprezentáció felel meg:  $S(L)$ ,  $\alpha\beta S(L)$ ,  $\alpha\beta\gamma S(L)$  illetve  $\beta\gamma S(L)$ . Ha  $n$  páros, akkor ezek a szelések  $3n + 1$ ,  $n + 3$ ,  $n + 3$  illetve  $n + 1$  2-rendű elemet tartalmaznak. Ha  $n$  páratlan,  $S(L)$   $3n$  2-rendű elemet tartalmaz, a másik három reprezentáció pedig  $n + 2$  darabot ( $n > 2$ ). Ez azt jelenti, hogy  $c$  csak úgy lehet  $L$  bal oldali kísérőeleme, ha  $\lambda_c S(L) = S(L)$  teljesül, vagyis  $c \in N_\lambda$  és  $u$  automorfizmus.

Legyen most  $L = C_{4n}$ . Ismét használjuk a főizotópotokat, ezek  $S(C_{4n})$ ,  $\alpha\beta S(C_{4n})$ ,  $\alpha\beta\gamma S(C_{4n})$  illetve  $\beta\gamma S(C_{4n})$ , amelyek rendre  $n + 1$ ,  $n + 3$ ,  $3$  egy 1 involúciót tartalmaznak. Ha  $n > 2$ , akkor a fenti érveléssel látható, hogy  $c \in N_\lambda$  és  $u$  automorfizmus.  $\square$

Az  $L = C_8$  esettel itt nem foglalkozunk, csak a vonatkozó eredményeket ismertetjük. A bizonyítás megtalálható a [Nag94] cikkben, illetve a kis komplexitás miatt számítógéppel (pl. a GAP programmal) is könnyűszerrel kiszámolható.

A fentiek alapján az alábbi tétel (ld. [Nag98a, Theorem 5]) minden pontját bebizonyítottuk.

**4.2.6. Tétel.** *Legyen  $(L, \cdot)$  a  $B_{4n}$  vagy  $C_{4n}$  ( $n \geq 2$ ) loopok valamelyike. Ekkor*

$$\text{Aut}(L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_n^* \times S_3 & \text{ha } L = B_{4n}, n \text{ páratlan} \\ \mathbb{Z}_n^* \times D_8 & \text{ha } L = B_{4n}, n \text{ páros} \\ \mathbb{Z}_{2n}^* \times \mathbb{Z}_2 & \text{ha } L = C_{4n}, n > 2, n \text{ páros} \\ D_8 & \text{ha } L = C_8 \end{cases}$$

Továbbá ezen loopok mindegyikére igaz, hogy az összes bal oldali pseudo-automorfizmusuk automorfizmus.

Az utolsó tételünk a  $B_{4n}$  ( $n \geq 2$ ) és a  $C_{4n}$  ( $n \geq 2$  páros) loopok által koordinátázott 3-hálózat teljes  $\Gamma$  kollineáció-csoportját írja le.

Jelölje  $L$  a felsorolt loopok valamelyikét. Legyen  $\mathcal{N}$  az  $L$  által koordinátázott 3-hálózat. Jelöljük  $P$ -vel az origó  $P(1,1)$   $\Gamma$  alatti pályáját. A 4.1.4 állítás szerint  $P$  függőleges egyenesek uniója, az  $x$ -tengellyel vett metszete pedig azon loopelemeket jelöli ki, amelyek előfordulnak bal oldali kíséreelemként. A mi esetünkben ezek pontosan az  $N_\lambda$  elemei, tehát  $|P| = 4n^2$ .

Vezessük be a  $\Lambda_0 = \langle \alpha, \gamma \rangle$  jelölést. Egy  $\Lambda_0$ -hoz nem tartozó tipikus  $\alpha^i \beta \gamma^j$  elem  $\Lambda_0$ -beli centralizátorának rendje 4, így ha  $n > 2$ , akkor  $\Lambda_0$  az egyetlen 2 indexű Abel-csoport  $G(L)$ -ben. Nyilván  $\Lambda_0$  regulárisan hat  $L$ -en.

Definiáljuk a  $\Gamma$  alábbi részcsoportjait.

$$\begin{aligned} T &= \{(\lambda_m, id) : m \in N_\lambda\}, & \Lambda &= \Phi^{-1}(\Lambda_0), \\ A &= \{(\sigma, \sigma) : \sigma \in \text{Aut}(L)\}, & M &= T\Lambda. \end{aligned}$$

**4.2.7. Lemma.** *Az  $M$  csoport a  $\Gamma$  egy Abel-féle normálosztója.  $M$  izomorf az  $N_\lambda \times \Lambda_0$  direkt szorzattal és regulárisan hat az origó  $P$  pályáján.*

*Bizonyítás.* Először megmutatjuk, hogy  $M$  Abel-csoport. A 4.2.2 lemma bizonyításában elmondottak szerint  $\Lambda$  és  $T$  elemeinek vízszintes és ferde egyeneseken vett hatása eleme az  $\langle \alpha, \gamma \rangle$  permutáció-csoportnak, ami Abel-féle, s így  $M$  kommutátor-részcsoportja triviális.

Azt tudjuk, hogy  $N_0 \triangleleft \Gamma$ , és  $\ker \Phi$  az  $N_0$  azon elemeiből áll, amelyek triviálisan hatnak a vízszintes egyenesek halmazán, tehát  $\ker \Phi \triangleleft \Gamma$  szintén. Ebből, és a tényből, hogy  $\Lambda_0$  karakterisztikus  $G(L)$ -ben, következik, hogy  $\Lambda \triangleleft \Gamma$ . Nyilván  $T \triangleleft \Gamma$  szintén, így  $M \triangleleft \Gamma$ .

Tekintsünk egy tetszőleges  $(u, v) \in M_{(1,1)}$  elemet. Ekkor  $v \in \langle \alpha, \gamma \rangle$  és  $v(1) = 1$ , tehát  $v = id$ . Ebből következik, hogy  $u = \lambda_m$ ,  $m \in N_\lambda$ , vagyis  $u = id$  szintén.

Tekintsük most  $M$  hatását a függőleges egyeseken. Az  $y$ -tengely  $M$  szerinti pályája ugyanaz, mint az  $y$ -tengely  $\Gamma$  szerinti pályája, vagyis pontosan az  $x = m$  ( $m \in N_\lambda$ ) egyenletű egyenesek halmaza. Ezen a halmazon  $T$  egy regulárisan ható normálosztó, tehát az  $M/T$  kiterjesztés felhasad. De mivel  $M$  Abel-féle, ezért  $M = M_{y\text{-teng}} \times T$ . Továbbá  $M/T \cong \Lambda / \ker \Phi \cong \Lambda_0$ , hiszen  $\Lambda \cap T = \ker \Phi$ .

Végezetül  $|M| = 4n^2 = |P|$ -ből következik, hogy  $M$  tranzitívan, tehát regulárisan hat  $P$ -n.  $\square$



**4.2.8. Tétel.** Legyen  $\Gamma$  az  $L$  loop által koordinátázott 3-hálózat teljes kollineáció-csoportja, ahol  $L = B_{4n}$  vagy  $C_{4n}$  ( $n \geq 2$ ). Ekkor  $\Gamma$  felírható mint  $M \rtimes \text{Aut}(L)$ , ahol  $M$  egy, az origó  $\Gamma$ -pályáján regulárisan ható Abel-féle kollineáció-csoport, és  $\text{Aut}(L)$  hatása a konjugálás szerinti.

*Bizonyítás.* (Ld. [Nag98a, Theorem 6].) Az 1.4.2 állításból következik, hogy  $\Gamma_{(1,1)}$  pontosan  $A$ , ami nyilván izomorf  $\text{Aut}(L)$ -hez. A 4.2.7 lemma szerint  $M$  egy a  $P = \Gamma((1, 1))$  pályán regulárisan ható  $\Gamma$ -normálosztó. Tehát  $\Gamma$  felírható  $M \rtimes A \cong M \rtimes \text{Aut}(L)$  szemidirekt szorzatként.  $\square$

*Megjegyzés.* Ez az eredmény egy érdekes analógiát mutat a csoport 3-hálózatok esetével, mikor is  $\Gamma \cong (G \times G) \rtimes \text{Aut}(G)$  (ld. [BS83, Theorem 10.1].)

### 4.3. Involutórikus Bol-loopok

A 4.1.2 állítás (ii) és (iii) részeiből adódik, hogy egy  $L$  Burn-loop esetén az  $L/N_\lambda$  faktorloop minden elemének a rendje 2. Az ilyen loopokat *involutórikus loopoknak* is nevezik (ld. [KS88]). Fordítva, egy involutórikus Bol-loop konjugált zárt, vagyis Burn-loop, hiszen a  $\lambda_x \lambda_y \lambda_x \in S(L)$  és a  $\lambda_x^{-1} \lambda_y \lambda_x \in S(L)$  azonosságok ekvivalensek. Involutórikus Bol-loop esetén nyilván  $J = id$ , s így a 4.1.2 állítás (i) részéből következik, hogy ilyen loopok esetén  $\ker \Phi = \{id\}$ .

A 2.5. alfejezetben megadott 8-adrendű Bol-loop példa egy nem-asszociatív involutórikus Bol-loopra. Egy másik fontos példa E. KOLB és A. KREUZER [KK95] munkájából származik.

Legyen  $R = \mathbb{F}_4[[u]]$  a formális Laurent-sorok gyűrűje.  $R$  lokális gyűrű, minden ideálja  $(u^k)$  alakú, legyen  $R_{(k)} = R/(u^k)$ . Jelölje  $\bar{x}$  az  $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \tau, 1 + \tau\}$ -beli konjugálás  $R$ -re illetve  $R_{(k)}$ -ra való kiterjesztését (együtthatónként), és definiáljuk az alábbi műveletet.

$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + u\bar{x}y}$$

A  $0 \in R$  láthatóan egységelem, az  $\mathbb{F}_4$  kettes karakterisztikája miatt pedig  $x \oplus x = 0$ . Megmutatjuk, hogy  $(R, \oplus)$  Bol-loop.

$R$ -et felfoghatjuk, mint az  $R$  hányadosteste által meghatározott affin egyenest. Reprerentálja  $\text{PSL}_2(R)$  egy elemét az

$$L_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ u\bar{a} & 1 \end{pmatrix}$$

mártix, látható, hogy a reprezentált elem az  $x \in R$  elemmel val bal oldali eltolás. Az

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ u\bar{a} & 1 \end{pmatrix}; a \in R \right\}$$

halmaz Bol-zárt és tranzitív  $R$ -en, tehát élesen tranzitív, és a meghatározott  $(R, \oplus)$  loop egy involutórikus Bol-loop. Mivel az összes számolás igaz az  $R_{(k)}$  faktorgyűrűben, ezért minden  $k > 0$  esetén  $(R_{(k)}, \oplus)$  véges involutórikus Bol-loop,  $|R_{(k)}| = 4^k$ . Jelölje  $G$  illetve  $G_{(k)}$  az  $R$  illetve  $R_{(k)}$  loopokhoz tartozó bal oldali eltoláscsoportokat, és legyen  $U = G_0$  illetve  $U_{(k)} = G_{(k),0}$  az egységelem stabilizátora. Most kiszámoljuk  $U$ -t, s ehhez először definiáljuk az alábbi multiplikatív csoportokat.

$$\begin{aligned} R_1 &= \{x \in R; x = 1 + u(\dots)\}, \\ E_1 &= \{x \in R_1; x\bar{x} = 1\}. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy  $U \cong E_1$ .

$$\begin{aligned} L_{a,b} &= L_{a \oplus b}^{-1} L_a L_b \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a+b}{1+u\bar{a}\bar{b}} \\ u\frac{\bar{a}+\bar{b}}{1+u\bar{a}\bar{b}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + a\bar{b}u & a + b \\ u(\bar{a} + \bar{b}) & 1 + \bar{a}bu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(1+a\bar{a}u)(1+b\bar{b}u)}{1+\bar{a}bu} & 0 \\ 0 & \frac{(1+a\bar{a}u)(1+b\bar{b}u)}{1+abu} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\bar{a}bu}{1+\bar{a}bu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

azaz

$$L_{a,b}(x) = \frac{1 + \bar{a}bu}{1 + \bar{a}bu} \cdot x \quad \text{és} \quad U \cong E_1.$$

Tekintsük most a

$$\varphi : R_1 \rightarrow E_1, \quad y \mapsto \frac{y}{y}$$

leképezést és legyen  $x \in E_1$  tetszőleges elem. Ekkor  $\tau + \tau^2 x \in R_1$  és  $\varphi(\tau + \tau^2 x) = x$ . Tehát  $E_1 = \text{Im } \varphi$ , s mivel  $\ker \varphi = \mathbb{F}_2[[u]]$ , kaptuk, hogy

$$U \cong R_1 / \mathbb{F}_2[[u]].$$

Vegyük észre, hogy minden eddigi számolás az  $R_{(k)}$  faktorgyűrűben is elvégezhető és a definíciók is értelmesek, ezért az utóbbi eredmény  $U_{(k)}$  struktúráját is leírja. Speciálisan,  $|U_{(k)}| = 2^{k-1}$  Abel-csoport és  $|G_{(k)}| = 2^{3k-1}$ .

A definíció felhasználásával rövid számolás útján megkaphatjuk, hogy  $Z(R) = \emptyset$  és

$$Z(R_{(k)}) = \{\alpha u^{k-1}; \alpha \in \mathbb{F}_4\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$R_{(k)} = R_{(k+1)} / Z(R_{(k+1)}).$$

Egy másik fontos és könnyen leellenőrizhető tény, hogy egy  $\alpha \in \mathbb{F}_4^*$  elemmel való szorzás loop-automorfizmus, ezek az automorfizmusok nyilván tranzitívan hatnak  $Z(R_{(k)}) \setminus \{0\}$ -n.

Ezek felhasználásával bizonyítjuk a következő állítást.

**4.3.1. Tétel.** *Az  $(R_{(k)}, \oplus)$  involutórikus Bol-loopot két elem generálja.*

*Bizonyítás.*  $k$  szerinti teljes indukcióval bizonyítunk,  $k = 1$  esetén az állítás nyilvánvaló. Rögzítsünk egy  $k > 1$  számot, ekkor az indukciós feltétel miatt  $R_{(k-1)} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ , ahol  $\bar{x} = xZ$ ,  $\bar{y} = yZ$ ,  $x, y \in R_{(k)}$  és  $Z = Z(R_{(k)})$ .

Tegyük fel továbbá, hogy  $\langle x, y \rangle \neq R_{(k)}$ , és rögzítsünk egy  $x, y \in K < L$  maximális részloopot. Elegendő megmutatni, hogy  $Z \leq K$ , mert ekkor az  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \leq K/Z \neq R_{(k-1)}$  ellentmondás adódik.

Tételezzük tehát fel, hogy  $Z \not\leq K$ , és legyen  $z \in Z \setminus K$ .  $K$  maximalitása miatt  $\langle K, z \rangle = K\langle z \rangle = L$ , tehát  $|L : K| = 2$ . Az 1.2.5 állítás (iii) pontja szerint ekkor  $K \triangleleft L$  normális részloop.

A fent elmondottak szerint az  $\mathbb{F}_4^* \leq \text{Aut}(L)$  tranzitívan hat  $Z \setminus \{0\}$ -n, így létezik egy  $\alpha \in \mathbb{F}_4^*$  elem, amelyre  $\alpha(z) \in K$ . Legyen  $N = K \cap \alpha(K)$ , ekkor  $|L : N| = 4$  és  $z, \alpha(z) \notin N$  miatt  $Z \cap N = \{0\}$ . Vagyis  $R_{(k)} = N \times Z$  és  $N \cong R_{(k-1)}$ . Ez viszont azt jelenti, hogy  $|Z(R_{(k)})| > 4$ , ami nem lehetséges. (A bizonyítás módszerét vö. [Bru58, VI. Theorem 2.3.])  $\square$

Az alfejezetet involutórikus Bol-loopokhoz kapcsolódó nyitott kérdésekkel fejezzük be.

**1. probléma.** *Igaz-e, hogy minden véges involutórikus Bol-loop feloldható?*

A következő alfejezetben látni fogjuk (4.4.2 lemma), hogy a kérdés ekvivalens azzal, hogy minden véges involutórikus Bol-loop rendje kettőhatvány, illetve azzal, hogy a  $G(L)$  bal oldali eltoláscsoport 2-csoport. S. HEISS [Hei96] munkájában megmutatta, hogy  $G(L)$  feloldhatóságából következik, hogy 2-csoport, valamint, hogy  $G(L)$  nem lehet véges egyszerű csoport. P. CAMERON és KORCHMÁROS GÁBOR [CK93] cikkbeli eredményéből következik, hogy ha  $G(L)$  2-tranzitívan hat  $L$ -en, akkor  $L$  elemi Abel-csoport kell legyen.

**2. probléma.** *Igaz-e, hogy minden  $L$  involutórikus Bol-loop esetén a  $G(L)_1$  stabilizátor részcsoport Abel-féle?*

Az ismert példák esetén a válasz igen.

## 4.4. Bol-féle univerzális 2-loopok

Ebben az alfejezetben a [Nag98b] cikk eredményeit ismertetjük.

**4.4.1. Definíció.** Az  $(L, \cdot)$  Bol-loopot 2-loopnak nevezzük, ha minden elemének a rendje 2-hatvány és univerzális 2-loopnak nevezzük, ha  $L$  minden izotópja 2-loop.

A kulcslemma a következő.

**4.4.2. Lemma.** Egy adott  $(L, \cdot)$  Bol-loop esetén a következő állítások ekvivalensek.

- (i) A loop  $|L|$  rendje 2-hatvány.
- (ii)  $L$  univerzális 2-loop.
- (iii) A  $G(L)$  bal oldali eltoláscsoport 2-csoport.

*Bizonyítás.* A  $G(L)$  csoport tranzitívan hat  $L$ -en, ezért (iii)-ből következik (i). Mivel pedig a loop rendje izotópiainvariáns fogalom, és minden elem rendje osztja loop rendjét, így (i)-ből következik (ii).

Tegyük most fel, hogy (ii) teljesül, és rögzítsük az  $\ell, m \in L$  elemeket. A (2.1) egyenlőségből tudjuk, hogy a  $\sigma_m$  Bol-tükrözés az  $(x, y)$  pontot az  $(m \cdot x^{-1}m, m^{-1} \cdot xy)$ -ba viszi. Eszerint a  $\sigma_\ell \sigma_m = (\alpha, \beta)$  kollineációra teljesül

$$\sigma_\ell \sigma_m : (x, y) \mapsto (\ell \cdot (m^{-1} \cdot xm^{-1})\ell, \ell^{-1} \cdot my).$$

az 1.4.2 állítás alapján kiszámíthatjuk a kollineáció ferde egyeneseken vett  $\gamma$  hatását:

$$\gamma = \lambda_{\ell \cdot m^{-2} \ell} \lambda_\ell^{-1} \lambda_m = \lambda_\ell \lambda_m^{-1}.$$

Az 1.3.7 állítás szerint  $\beta = \lambda_{\ell^{-1}} \lambda_{m^{-1}}^{-1}$  és  $\gamma = \lambda_\ell \lambda_m^{-1}$  egyaránt baleltolások  $(L, \cdot)$  valamely izotópjában, s így a feltétel szerint rendjük 2-hatvány. Létezik tehát egy  $k$  természetes szám úgy, hogy  $(\sigma_\ell \sigma_m)^{2^k}$  fixen hagyja az összes vízszintes és ferde egyenest, azaz  $(\sigma_\ell \sigma_m)^{2^k} = id$ . És mivel a Bol-tükrözések invariáns halmazt alkotnak az  $N = \langle \sigma_m; m \in L \rangle$  csoportban, Baer tétele (ld. [Kur77, 71. oldal]) szerint  $N$  2-csoport. Ekkor azonban  $N_0 \leq N$  és  $G(L) = \Phi(N_0)$  is 2-csoportok.  $\square$

Ebből következik a tétel.

**4.4.3. Tétel.** Minden véges univerzális Bol-féle 2-loop feloldható.

*Bizonyítás.* a 4.4.2 lemma szerint  $G(L)$  2-csoport. Tekintsük  $G(L)$ -nek egy, az egységelemet is tartalmazó maximális imprimitivitási tartományát, jelöljük ezt  $K$ -val. Az 1.2.5 állítás (i) és (iii) pontjai miatt  $K$  egy 2-indexű normális részloop. Ezzel a bizonyítást be is fejeztük.  $\square$

Mint [Nag98b]-ban geometriai úton beláttuk, Moufang-loopok esetében a 2-loop-tulajdonság univerzális. Továbbá a Moufang-loopok esetében a bal

és a jobb oldali eltoláscsoportok izomorfak és normalizálják egymást. Tehát a 4.4.2 lemma szerint egy  $L$  Moufang-féle 2-loop esetén  $M(L)$  2-csoport. Felhasználva [Bru58, VI. Lemma 2.2.]-t, ezzel új bizonyítást adtunk Glaubermann és Wright egy tételére.

**4.4.4. Következmény (Glauberman, Wright [GW68]).** *Minden véges Moufang-féle 2-loop nilpotens.*  $\square$

*Megjegyzés.* A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy ha  $p > 2$  prímszám és  $L$  egy Moufang-féle  $p$ -loop, akkor Glaubermann  $Z^*$ -tétele szerint a bal oldali eltoláscsoport, s így a teljes multiplikációcsoport is,  $p$ -csoport. A már említett [Bru58, VI. Lemma 2.2.] miatt ebben az esetben is azt kapjuk, hogy  $L$  centrálisan nilpotens.

A dolgozatot egy, az előző alfejezetben említett 1. problémához kapcsolódó megfontolással fejezzük be. Ha az 1. kérdésre adandó válasz *nem*, akkor a legkisebb létező ellenpélda egyszerű loop. Sőt, a következő tételből az is következik, hogy a legkisebb ellenpéldát két eleme generálja.

**4.4.5. Tétel.** *Ha az  $L$  Bol-loop bármely két eleme 2-hatványrendű részloopot generál, akkor  $L$  univerzális 2-loop.*

*Bizonyítás.* A 4.4.2 lemma bizonyítását finomítjuk. Legyenek  $m, \ell \in L$  tetszőleges elemek és  $K = \langle m, \ell \rangle$  az általuk generált részloop. Megmutatjuk, hogy az  $u = \lambda_\ell \lambda_m$  elem rendje 2-hatvány. Jelöljük  $u$  rendjét  $k$ -val, és tekintsük az egységelemet tartalmazó  $(x_0 = 1, x_1, \dots, x_{k-1})$   $u$ -ciklust,  $x_{i+1} = u(x_i)$ .  $K = mK = \ell K$  miatt  $u$ -t megszoríthatjuk  $K$ -ra, és az  $u|_K$  megszorítás  $(K, \cdot)$ -beli eltolások szorzata, azaz  $u|_K$  a  $(K, \cdot)$  loop egyik izotópjának egy baleltolása. Ezért mindegyik  $x_i$  elem  $K$ -beli, és a feltétel szerint az  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  ciklus hossza 2-hatvány, vagyis a  $\lambda_\ell \lambda_m$  elem  $k$  rendje 2-hatvány. A lemma bizonyítását folytatva következik, hogy  $\sigma_\ell \sigma_m$  2-elem, tehát  $N$  és  $G(L)$  2-csoportok.  $\square$

A jelenlegi ismeretek szerint minden véges, 2 elem által generált, involutórikus Bol-loop valamely  $R_{(k)}$  loop homomorf képe. Adódik tehát a harmadik nyitott kérdésünk.

**3. probléma.** *Igaz-e, hogy minden véges, 2 elem által generált, involutórikus Bol-loop előáll, mint valamely  $(R_{(k)}, \oplus)$  loop homomorf képe?*

# Utószó

A disszertációban Nagy Gábor dolgozatai közül az alábbiak kerültek feldolgozásra:

- [Nag94] G.P. Nagy. Collineation groups of the smallest Bol 3-nets. *Note di Matematica*, 14(1):115–128, 1994.
- [Nag98a] G.P. Nagy. Group invariants of certain Burn loop classes. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 5:403–415, 1998.
- [Nag98b] G.P. Nagy. Solvability of universal Bol 2-loops. *Commun. Algebra*, 26(2):549–555, 1998.
- [Nag99] G.P. Nagy. On Moufang 3-nets and groups with triality. Elküldve az *Acta Sci. Math. Szeged* folyóiratnak, 1999.

Nagy Gábor disszertációban fel nem használt dolgozatai:

- [BN92] Balogh József és Nagy Gábor. A  $p$ -adikus számok egy érdekes alkalmazása. *Polygon*, II. kötet 2. szám, 1992.
- [NSz97] G.P. Nagy and T. Szőnyi. Caps in finite projective spaces of odd order. *J. Geom.*, 59:103–113, 1997.
- [Nag99b] G.P. Nagy. A Campbell-Hausdorff formula for local analytic B-loops. Kézirat, 1999.
- [Nag99c] G.P. Nagy. Linear representations of finite commutative Moufang loops. Kézirat, 1999.

# Summary in English

Since the beginning of the loop theoretical research in the first decades of this century, the class of *Moufang loops* played an important role. During the study of this class, several concepts were developed which turned out to be efficient by the investigation of the larger class of *Bol loops* as well. One such tool is the core of the loop which is strongly related to the inverse map  $x \mapsto x^{-1}$  (cf. [Bru58], [Gla64],[Gla68]). This involutive map is also connected to the symmetries of the 3-net associated to the loop. By [FN93], we call these symmetries *Bol reflections*.

The geometric approach via Bol reflections greatly simplifies the study of some algebraic properties, like isotope invariant concepts, and gives a more precise knowledge of the relations between the corresponding geometric, algebraic and group theoretical concepts.

The theory of Bol reflections can be extended or applied in different directions. One possible direction is the subject of finite Bol and involutorial Bol loops, this is linked with our open questions at the end of the dissertation. Another potential application is the theory of algebraic *B*-loops, where the first natural step could be the description of the algebraic commutative Moufang loops.

The aim of the **first chapter** is to give a summary about the most important elements of the theory of quasigroups, loops and 3-nets. The new result of this chapter are Theorems 1.2.8. and 1.5.3., where we prove *a 1-1 relation between the nuclei of the loop, the centralizer of the respective translation groups and the groups of collineations fixing a given parallel class of lines.*

In the **second chapter** we investigate algebraic and geometric properties of Bol and B-loops using the concept of the core of a Bol loop and the Bol reflections. The main result of the chapter (Theorem 2.3.3.) gives a geometric characterization of those Bol loops, in which the inverse map is a right pseudo-automorphism: *In the Bol loop  $(L, \cdot)$ , the inverse map  $x \mapsto x^{-1}$*

is a right pseudo-automorphism if and only if the collineation group  $N_{x\text{-axis}}$  stabilizes some point of the  $x$ -axis.

In this new approach we give an overview on the loop theoretical results of G. Glauberman and prove a structure theorem for  $B$ -loops.

The main result of the **third chapter** (Theorem 3.2.4 and 3.2.5) claims that *the class of groups with triality corresponds to the class of Moufang 3-nets via Bol reflections*. These theorems generalize Doro's triality functor ([Dor78]) for 3-nets. We also describe the most important steps of the classification of finite simple Moufang loops due to [Lie87]. Finally, we give the construction of the division ring of Cayley numbers and Paige's class of simple Moufang loops.

In the **fourth chapter** we consider special loop classes. In Section 4.1, we prove some *algebraic properties of the class of left conjugacy closed and Burn loops*, and we investigate *the kernel* of the homomorphism  $\Phi : N_0 \rightarrow G(L)$  (Theorem 4.1.6.). In Section 4.2, we describe the loop constructions given in [Bur78, Bur81] in details. These loops belong to the classes considered in the previous section. Using the earlier results, we explicitly calculate *the group of automorphisms and collineations belonging to these loops and their 3-nets* (Theorems 4.2.3., 4.2.6. and 4.2.8.).

In Section 4.3 we investigate Bol loops of exponent 2. These loops turn out to be of Burn type. There are quite few known examples for such loops, any of them arises from a construction given in [KK95]. We prove that *these loops are generated by two elements* (Theorem 4.3.1.). The universal 2-loop property considered in Section 4.4 is motivated by the previous examples. In this section, we give necessary and sufficient conditions for the solvability of Bol 2-loops: By Theorem 4.4.3., *any finite universal Bol 2-loop is solvable*, and by Theorem 4.4.5., *if any two elements of a Bol loop generate a subloop of 2-power order then the loop is solvable*. This theorem relates Theorem 4.3.1. to the following open questions.

**Problem 1** *Are all finite involutorial Bol loops solvable?*

**Problem 2** *Is the stabilizer  $G(L)_1$  Abelian for any finite involutorial Bol loop  $L$ ?*

**Problem 3** *Is any finite involutorial Bol loop, which can be generated by two elements, homomorphic image of an  $(R_{(k)}, \oplus)$ ?*

The results of this paper are called Theorems (Tétel) or Propositions (Állítás). Almost all of these contain *new results*. In some cases, the results imply *new proofs* of existing theorems.



# Irodalomjegyzék

- [Alb43] A.A. Albert. Quasigroups I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 54:507–519, 1943.
- [Alb44] A.A. Albert. Quasigroups II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55:401–419, 1944.
- [Bae39] R. Baer. Nets and groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 46:110–141, 1939.
- [Bel65] V.D. Belousov. The core of a Bol loop. In *Collection in General Algebra (Sem.)*, pages 53–66. Akad. Nauk Moldav. SSR, Kishinev, 1965. In Russian.
- [Bel76] V.D. Belousov. *Foundations of the Theory of Quasigroups and Loops*. Nauka, Moskow, 1976. In Russian.
- [Bla38] W. Blaschke. *Geometrie der Gewebe*. Springer-Verlag, Berlin, 1938.
- [Bru58] R.H. Bruck. *A Survey of Binary Systems*. Springer, Berlin, 1958.
- [BS83] A. Barlotti and K. Strambach. The geometry of binary systems. *Adv. in Math*, 49:1–105, 1983.
- [Bur78] R.P. Burn. Finite Bol loops I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 84(3):53–66, 1978.
- [Bur81] R.P. Burn. Finite Bol loops II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 89(3):445–455, 1981.
- [Che90] O. Chein. Examples and methods of construction. In O. Chein et al., editors, *Quasigroups and Loops: Theory and Applications*, Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

- [CK93] P.J. Cameron and G. Korchmáros. One-factorizations of complete graphs with a doubly transitive automorphism group. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 25(1):1–6, 1993.
- [Det95] M. Dettweiler. Einfache Moufang Loops. Master's thesis, University of Erlangen, 1995.
- [Dor78] S. Doro. Simple Moufang loops. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 83:377–392, 1978.
- [FN93] M. Funk and P.T. Nagy. On collineation groups generated by Bol reflections. *J. Geom.*, 41:63–78, 1993.
- [Fre85] H. Freudenthal. Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. *Geom. Dedicata*, 19:7–63, 1985.
- [Fri81] E. Fried. *Általános algebra*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [Gla64] G. Glauberman. On loops of odd order I. *J. Alg.*, 1:374–396, 1964.
- [Gla66] G. Glauberman. Central elements in core-free groups. *J. Alg.*, 4:403–420, 1966.
- [Gla68] G. Glauberman. On loops of odd order II. *J. Alg.*, 8:393–414, 1968.
- [GR90] E.G. Goodaire and D.A. Robinson. Some special conjugacy closed loops. *Can. Math. Bull.*, 3(1):73–78, 1990.
- [GW68] G. Glauberman and C.R.B. Wright. Nilpotence of finite Moufang 2-loops. *J. Alg.*, 8:415–417, 1968.
- [Hei96] S. Heiss. Invariant 1-factorization of complete graphs. Unpublished manuscript, 1996.
- [Hir79] J.W.P. Hirschfeld. *Projective geometries over finite fields*. Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [KK95] E. Kolb and A. Kreuzer. Geometry of kinematic  $k$ -loops. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 65:189–197, 1995.
- [KS88] G. Korchmáros and D. Saeli. Commutative loops of exponent two and involutorial 3-nets with identity. *Geom. Dedicata*, 28(3):259–276, 1988.
- [Kur77] H. Kurzweil. *Endliche Gruppen*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

- [Lie87] M.W. Liebeck. The classification of finite simple Moufang loops. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 102:33–47, 1987.
- [Mou34] R. Moufang. Zur Struktur von Alternativkörper. *Math. Ann.*, 110:416–430, 1934.
- [Nag94] G.P. Nagy. Collineation groups of the smallest Bol 3-nets. *Note di Matematica*, 14(1):115–128, 1994.
- [Nag98a] G.P. Nagy. Group invariants of certain Burn loop classes. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 5:403–415, 1998.
- [Nag98b] G.P. Nagy. Solvability of universal Bol 2-loops. *Commun. Algebra*, 26(2):549–555, 1998.
- [Nag99] G.P. Nagy. On Moufang 3-nets and groups with triality. Elküldve az *Acta Sci. Math. Szeged* folyóiratnak, 1999.
- [NR81] H. Niederreiter and K. Robinson. Bol loops of order  $pq$ . *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 89:241–256, 1981.
- [NS94] P.T. Nagy and K. Strambach. Loops as invariant sections in groups, and their geometry. *Canad. J. Math.*, 46(5):1027–1056, 1994.
- [NS98] P.T. Nagy and K. Strambach. Loops, their cores and symmetric spaces. *Israel J. Math.*, 105:285–322, 1998.
- [NS99] P.T. Nagy and K. Strambach. Sharply transitive sections in Lie groups: A Lie theory of smooth loops. Manuscript, 1999.
- [Pai56] L.J. Paige. A class of simple Moufang loops. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7:471–482, 1956.
- [Pfl90] H.O. Pflugfelder. *Quasigroups and loops: introduction*. Number 7 in Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1990.
- [Rob66] D.A. Robinson. Bol loops. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123:341–354, 1966.
- [RR93] D.A. Robinson and K.H. Robinson. A class of Bol loops whose nuclei are not normal. *Arch. Math.*, 61:596–600, 1993.