Összefoglaló
a differenciálgeometria tárgyú geometria szigorlati tételekhez

Készítette: Nagy Gábor

Szeged, 2005. január 18.

A jelen felsorolás csak kiindulási pont a szigorlatra való készüléshez, a vizsgán elsősorban a fogalmak alapos megértéséről győződünk meg. A kivonatot szigorúan tilos a vizsga során bármilyen formában közvetlen segítségként használni!

Görbék a síkon és a térben: Paraméterezés, hosszúság, görbület, torzió, Frenet-formulák, körülfordulási szám, görbék alaptétele.

Kizárólag elemi görbeívekkel foglalkozunk. Görbék megadása:

Definíció. Görbék Gauss-féle, azaz paraméteres megadása. Síkgörbe explicit és implicit megadása. Ekvivalens paraméterezés. A geometriai görbe.

Egy fogalmat *geometriainak* nevezünk, ha független a paraméterezéstől.

Érintő egyenes, érintővektor, érintő egységvektor. „Az érintő a szelő határhelyzete.”

A görbeív hossza beírt töröttvonallal, illetve $\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|dt$ képlettel. Részgörbe hossza, ívhossz szerinti paraméterezés.

Állítás. Ívhossz szerinti paraméterezés esetén $|\dot{\mathbf{r}}| = 1$.

<u>Jelölés:</u> t általános paraméter, s ívhossz szerinti paraméter, $\dot{\mathbf{r}}$ deriválás az általános paraméter szerint, $\mathbf{r}'$ deriválás az ívhossz szerinti paraméter szerint.

Lemma. Ha az $\mathbf{f}(t)$ vektorértékű függvény hossza azonosan konstans, akkor merőleges a deriváltjára. Azaz: $|\mathbf{f}(t)| \equiv const \Rightarrow \mathbf{f}(t) \perp \mathbf{f}'(t)$.

A továbbiakban ívhossz szerinti paraméterezésben dolgozunk, és egy idő után elhagyjuk a függvények argumentumát: $f = f(s)$.

Definíció. A görbe P-beli simulóköre és simulósíkja.

Állítás. A simulósík tartalmazza az érintő egyenest és a simulókört, ez utóbbit az érintő egyenes érinti. A simulókör sugara a $P = \mathbf{r}(s)$ görbepontban $1/|\mathbf{r}''(s)|$.

A P pontban a görbe érintő egységvektorát $\mathbf{t}$ jelöli. Ívhossz szerinti paraméterezésben $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'(s)$.

Definíció. Legyen a P görbepontban a simulókör sugara R. A $\kappa = \kappa(s) = 1/R = |\mathbf{r}''|$ értéket a görbe P-beli *görbületének* nevezzük. Az $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s) = \mathbf{r}''(s)/|\mathbf{r}''(s)|$ vektor a görbe P-beli *főnormálisa.* A $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s) = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ a görbe *binormálisa* (a P pontban).

Következmény. Az r sugarú kör bármely pontjában a görbület értéke $1/r$.

Általános paraméterezés esetén

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

Állítás. A simulósíkot $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ feszítik ki, $\mathbf{n}$ a simulókör origója felé mutat. $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ortonormált bázist alkotnak. $\mathbf{b}'$ merőleges $\mathbf{t}$-re és $\mathbf{b}$-re, azaz párhuzamos $\mathbf{n}$-el.

Definíció. A görbe $P = \mathbf{r}(s)$ pontbeli *torziója* az a $\tau = \tau(s)$ szám, melyre $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$.

Általános paraméterezésben a torziót az alábbi képlet adja meg:

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

Állítás. Ívhossz szerinti paraméterezésben a binormális szögsebessége $|\tau(s)|$. A görbe akkor és csak akkor síkgörbe, ha torziója azonosan nulla. Frenet-formulák.

Tétel. (A görbeelmélet alaptétele; unicitás rész.) Ha két görbe görbületüket és torziójukat ívhossz szerinti paraméterezésben ugyanazok a függvények adják meg, akkor a görbék mozgással fedésbe hozhatók.

A felület definíciója, paramétervonalak, érintősík, vektormezők, felületi görbék, iránymenti derivált, derivációk és érintősík, vektormezők.

Kizárólag elemi felületdarabokkal foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a $T \subset \mathbb{R}^2$ paramétertartomány $T = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ alakú.

Definíció. Felületek explicit és implicit megadása. Felületek paraméteres megadása $\mathbf{r}(u,v) : T \to \mathbb{R}^3$ függvénnyel. Ekvivalens paraméterezés. Paraméterezés szinguláris pontja: $\partial_1\mathbf{r}(u,v) \times \partial_2\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{0}$.

Jelölés: Az $f(x,y)$ 2-változós függvény parciális deriváltjaira többféle jelölés használatos. Pl. az x szerinti parciális derivált lehet $f'_x(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ és $\partial_1 f(x,y)$. Mi ez utóbbit használjuk.

A továbbiakban $\mathbf{r}(u,v)$ egy rögzített $\mathscr{F}$ felület rögzített paraméterezése, és feltételezzük, hogy minden pont nem-szinguláris.

Definíció. A $g(t) : [a,b] \to T$, $g(t) = (u(t), v(t))$ görbéket *paramétergörbéknek* nevezzük. A $G(t) = \mathbf{r}(g(t)) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ görbéket *felületi görbének* nevezzük.

Definíció. Legyen $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ a felület tetszőleges pontja. A $G(t) = \mathbf{r}(t, v_0)$ és $G(t) = \mathbf{r}(u_0, t)$ speciális felületi görbéket a P_0-n áthaladó *paramétervonalaknak* nevezzük.

Az $\mathbf{r}$ függvény (u_0, v_0)-beli parciális deriváltjai pontosan a paramétervonalak P_0-beli érintővektorai. Az általános $G(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ felületi görbe érintővektora a láncszabály szerint

$$\dot{G}(t) = \partial_1 \mathbf{r}(u(t), v(t))\dot{u}(t) + \partial_2 \mathbf{r}(u(t), v(t))\dot{v}(t).$$

Definíció. A felület P_0-beli *érintősíkja* a P_0-n átmenő felületi görbék P_0-beli érintővektorainak összessége.

Ez az *absztrakt* érintősík, ami egy vektortér $\partial_1 \mathbf{r}(u_0, v_0), \partial_2 \mathbf{r}(u_0, v_0)$ bázisvektorokkal. A felületi normális egységvektor a $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ pontban:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(P_0) = \mathbf{m}(u_0, v_0) = \frac{\partial_1 \mathbf{r}(u_0, v_0) \times \partial_2 \mathbf{r}(u_0, v_0)}{|\partial_1 \mathbf{r}(u_0, v_0) \times \partial_2 \mathbf{r}(u_0, v_0)|}.$$

Jelölje $\mathscr{C}(\mathscr{F}) = \{f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}\}$ a felületen értelmezett differenciálható függvények (=skalármezők) halmazát; ezek nyilván $\mathbb{R}$ feletti vektorteret alkotnak. $\mathscr{C}(\mathscr{F})$ bijekcióba állítható a T paramétertartományon értelmezett függvények $\mathscr{C}(T)$ terével: minden $f \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$ függvényhez hozzárendelhetjük az $f \circ \mathbf{r} : T \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}(T)$-beli függvényt.

Hasonló módszerrel, adott $G(t)$ felületi görbe segítségével minden $f \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$ függvényhez hozzárendelhetjük az $f^*(t) = f(G(t))$ egyváltozós függvényt.

Definíció. Legyen $\mathbf{v}$ egy P-beli érintővektor. Válasszunk egy $G(t)$ felületi görbét, melyre $G(t_0) = P$ és $\dot{G}(t_0) = \mathbf{v}$. Definiáljuk az $f \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$ függvény $\mathbf{v}$ *irány szerinti deriváltját* a $d_\mathbf{v} f = f^{*\prime}(t_0) = \frac{d}{dt}|_{t_0}(f(G(t)))$ képlet segítségével.

Definíció. $P \in \mathscr{F}$-beli *derivációnak* nevezzük azt a $\delta : \mathscr{C}(\mathscr{F}) \to \mathbb{R}$ lineáris leképezést, melyre $\delta(fg) = \delta(f)g(P) + f(P)\delta(g)$ teljesül minden $f, g \in \mathscr{C}(\mathscr{F})$ esetén.

Tétel. Legyen $\mathbf{v}$ egy P-beli érintővektor. Ekkor $d_\mathbf{v}$ iránymenti derivált P-beli deriváció. Fordítva, minden δ P-beli derivációhoz létezik pontosan egy $\mathbf{v}$ érintővektor, melyre $\delta = d_\mathbf{v}$.

Következmény. A P-beli derivációk vektortere azonosítható a felület P-beli érintősíkjával.

Kovariáns deriválás, Christoffel szimbólumok, párhuzamosság, geodetikus, ezek differenciálegyenlete és extremalitása.

Rögzítjük az $\mathscr{F}$ elemi felületet, annak az $\mathbf{r} : T \to \mathbb{R}^3$ paraméterezését $T = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ paramétertartományon. A felület P pontbeli érintősíkját $T_P\mathscr{F}$ jelöli. A felületet azonosítjuk a paramétertartománnyal, azaz nem különböztetjük meg az $(u, v) \in T$ paramétert és a hozzátartozó $P = \mathbf{r}(u, v)$ felületi pontot.

Definíció. *Skalármező:* a felületen értelmezett valós értékű differenciálható függvény, $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$.
Vektormező: a felületen értelmezett vektorértékű differenciálható függvény, $\mathbf{X}$:

$\mathscr{F} \to \mathbb{R}^3$.
Érintő vektormező: Olyan $\mathbf{X}$ vektormező, melynél a felület bármely P pontja esetén $\mathbf{X}(P)$ érintővektor a P pontban, azaz $\mathbf{X}(P) \in T_P\mathscr{F}$.

Nyilván minden vektormező három skalármezőből tevődik össze: $\mathbf{X}(P) = (x_1(P), x_2(P), x_3(P))$. A fenti azonosítással $\partial_1\mathbf{r}$ és $\partial_2\mathbf{r}$ érintő vektormezők. Ezek minden P pontban a $T_P\mathscr{F}$ érintősík egy bázisát adják, tehát minden $\mathbf{X}$ érintő vektormező előáll $\mathbf{X}(P) = x_1(P)\partial_1\mathbf{r}(P) + x_2(P)\partial_2\mathbf{r}(P)$ alakban, ahol x_1, x_2 skalármezők.

Definíció. Az f skalármező $\mathbf{X}$ érintő vektormező szerinti deriváltja a

$$(d_{\mathbf{X}} f)(P) = (d_{\mathbf{X}(P)} f)(P)$$

képlettel értelmezett skalármező. Az $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektormező $\mathbf{X}$ érintő vektormező szerinti deriváltját komponensenként értelmezzük:

$$d_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = (d_{\mathbf{X}} y_1, d_{\mathbf{X}} y_2, d_{\mathbf{X}} y_3).$$

Definíció. *Kovariáns derivált:* $\mathbf{v} \in T_P\mathscr{F}$, $\mathbf{X}$ érintő vektormező, $\mathbf{Y}$ tetszőleges vektormező. $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}$ a $d_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}$ iránymenti deriváltjának merőleges vetülete a P-beli érintősíkra. $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ a $d_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ érintő vektormező szerinti deriváltjának merőleges vetülete a P-beli érintősíkra.

Állítás. Az iránymenti, az érintő vektormező szerinti és a kovariáns derivált tulajdonságai.

Definíció. Minden $i, j = 1, 2$-re legyen $\Gamma^1_{ij}, \Gamma^2_{ij}$ az a két skalármező, melyre $\nabla_{\partial_i\mathbf{r}}\partial_j\mathbf{r} = \Gamma^1_{ij}\partial_1\mathbf{r} + \Gamma^2_{ij}\partial_2\mathbf{r}$. A Γ^k_{ij} skalármezőket *Christoffel-szimbólumoknak* nevezzük.

Tétel. A Christoffel-szimbólumok az alsó indexeikben szimmetrikusak, azaz $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Állítás. A $G(t)$ felületi görbénél a $d_{\dot{G}}\dot{G}$ iránymenti derivált nem más, mint az érintő egységvektor ívhossz szerinti deriváltja, azaz $\kappa\mathbf{n}$.

Definíció. A G görbét *geodetikusnak* nevezzük, ha $\nabla_{\dot{G}}\dot{G} \equiv \mathbf{0}$, azaz ha minden pontjában a normálisa merőleges az érintősíkra.

Tétel. (Geodetikus differenciálegyenlete) Legyen $g : [a,b] \to T$ a $G : [a,b] \to \mathscr{F}$ geodetikus paramétergörbéje: $G(t) = \mathbf{r}(g(t))$. A fenti azonosítás segítségével tekintsük a Christoffel-szimbólumokat mint T-n értelmezett függvények. Ekkor g eleget tesz a

$$\begin{cases} \ddot{g}_1 + \dot{g}_1^2\Gamma^1_{11} + 2\dot{g}_1\dot{g}_2\Gamma^1_{12} + \dot{g}_2^2\Gamma^1_{22} = 0 \\ \ddot{g}_2 + \dot{g}_1^2\Gamma^2_{11} + 2\dot{g}_1\dot{g}_2\Gamma^2_{12} + \dot{g}_2^2\Gamma^2_{22} = 0 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszernek.

Tétel. (Geodetikusok extremalitása) Egy görbe ívhosszmérésre nézve akkor és csak akkor extremális, ha geodetikus.

Az extremalitás fogalmát elég szemléletesen elmondani, de indoklással együtt kell tudni a sík- és a gömbfelület geodetikusait.

Weingarten leképezés, normálgörbület, Euler-tétel, Gauss és Minkowski görbület, belső geometria.

Definíció. *Első alapforma vagy belsőgeometriai főmennyiség:* $g_P : T_P\mathscr{F} \times T_P\mathscr{F} \to \mathbb{R}$, és minden $\mathbf{u},\mathbf{v} \in T_P\mathscr{F}$ esetén $g_P(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{uv}$.
Weingarten-leképezés vagy külsőgeometriai főmennyiség: $B_P : T_P\mathscr{F} \to T_P\mathscr{F}$, mely minden $\mathbf{v} \in T_P\mathscr{F}$ érintővektorhoz a felületi normális egységvektor $d_\mathbf{v}\mathbf{m}$ iránymenti deriváltját rendeli.
Második alapforma: $M_P : T_P\mathscr{F} \times T_P\mathscr{F} \to \mathbb{R}$, ahol minden $\mathbf{u},\mathbf{v} \in T_P\mathscr{F}$ esetén $M_P(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -g_P(\mathbf{u}, B_P(\mathbf{v}))$.

Amennyiben az érintősíkon rögzítjük a $\{\partial_1\mathbf{r}, \partial_2\mathbf{r}\}$ bázist, akkor az alapformák 2×2-es mátrixként írhatók. Ezek elemeit nevezzük *alapmennyiségeknek.*

Azokat a felülethez kapcsolódó fogalmakat nevezzük belsőgeometriainak, melyek *metrikus eszközökkel* meghatározhatók. Csakugyan, a felületi metrikát (ívhossz, szög, terület mérése) az első alapmennyiségek egyértelműen meghatározzák. Mivel a méréshez „nem kell kilépni” a felületből, azt szoktuk mondani, hogy a belsőgeometriai fogalmakat a felületen belül élő „lapos matematikusok” is megismerhetik.

Állítás. 1. g_P szimmetrikus, pozitív definit bilineáris leképezés az érintősíkon.
2. B_P jól definiált, mert $d_\mathbf{v}\mathbf{m} \perp \mathbf{m}$, azaz $d_\mathbf{v}\mathbf{m} \in T_P\mathscr{F}$.
3. B_P lineáris transzformáció.
4. M_P szimmetrikus bilineáris leképezés.

Állítás. Az $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ érintő vektormezőkre $d_\mathbf{X}\mathbf{Y} = \nabla_\mathbf{X}\mathbf{Y} + M(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{m}$.

Legyen $G(t)$ felületi görbe $\mathbf{t} = \dot{G}$ érintővektorral. Már láttuk, hogy a $d_{\dot{G}}\dot{G}$ iránymenti derivált az érintő egységvektor ívhossz szerinti deriváltja, azaz $d_\mathbf{t}\mathbf{t} = \kappa\mathbf{n}$. Másrészt, az előzőek miatt $d_\mathbf{t}\mathbf{t} = \nabla_\mathbf{t}\mathbf{t} + M(\mathbf{t},\mathbf{t})\mathbf{m}$, azaz $\kappa\mathbf{n}$ érintősíkra merőleges komponense $M(\mathbf{t},\mathbf{t})\mathbf{m}$, ami csak $\mathbf{t}$-től függ, G-től nem.

Definíció. A $\kappa_m = M(\mathbf{t},\mathbf{t}) = \kappa\mathbf{nm}$ értéket a görbe *normálgörbületének* nevezzük.

Tétel. (Meusnier) Felületi görbe esetén $\kappa_m = \kappa\cos\varphi$, ahol φ a felület és a görbe főnormálisa között bezárt szög.

Rögzítsük a felület P pontját és tekintsük a $T_P\mathscr{F}$ egségvektorait; ezek pontosan a P-ből a P középpontó egységkör Q pontjaiba mutató $\mathbf{t} = \overrightarrow{PQ}$ vektorok. Mivel az egységkör kompakt, a $Q \mapsto \kappa_m = M(\mathbf{t},\mathbf{t})$ függvény felveszi szélsőértékeit; legyenek ezek $\kappa_{\min}$ és $\kappa_{\max}$ a megfelelő $\mathbf{t}_{\min}$ és $\mathbf{t}_{\max}$ irányokkal.

Tétel. (Euler) A $\mathbf{t}$ irányhoz tartozó normálgörbület $\kappa_m = \kappa_{\min}\cos^2\varphi + \kappa_{\max}\sin^2\varphi$, ahol φ a $\mathbf{t}$ és $\mathbf{t}_{\min}$ által bezárt szög.

Következmény. A $\mathbf{t}_{\min}$, $\mathbf{t}_{\max}$ *főgörböületi irányok* merőlegesek. Az általuk alkotott bázisban a B_P Weingarten-leképezés mátrixa $\begin{pmatrix} -\kappa_{\min} & 0 \\ 0 & -\kappa_{\max} \end{pmatrix}$.

Definíció. A Weingarten-leképezés $\kappa(P) = \det B_P = \kappa_{\min}\kappa_{\max}$ determinánsát a felület P pontbeli *Gauss-féle szorzatgörbületének* nevezzük. A Weingarten-leképezés $-\frac{1}{2}\mathrm{Spur} B_P = (\kappa_{\min} + \kappa_{\max})/2$ nyomát *Minkowski-féle összeggörbületnek* nevezzük.

Tétel. (Theorema egregium) A Gauss-féle szorzatgörbület belsőgeometriai mennyiség.

Indoklással együtt kell tudni sík-, a henger- és a gömbfelület $\kappa_{\min}, \kappa_{\max}$ *főgörbületeit* valamint szorzat- és összeggörbületét.