Feladatsor A differenciálgeometria alapja c. kurzus gyakorlatához

Dr. Nagy Gábor, Geometria Tanszék

2010. szeptember 16.

Görbék paraméterezése

1. feladat. (A) Bizonyítsuk be a vektoriális szorzatra vonatkozó kifejtési tételt: Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

2. feladat. (A) Mutassuk meg, hogy a $q(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2$ kvadratikus alak akkor és csak akkor definit, ha $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$, és akkor és csak akkor szemidefinit, ha $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$.

3. feladat. (B) Milyen $\boldsymbol{r}(t)$ vektorértékű függvényre teljesül

a) $|\boldsymbol{r}'| = |\boldsymbol{r}|'$;

b) $\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}' = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{r}|'$?

4. feladat. (Z) Adjuk meg az alábbi görbék ívhossz szerinti paraméterezését:

a) $\boldsymbol{r} : [-2, 3] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{r}(t) = (3t - 5, 4 - 4t)$;

b) $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$;

c) $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{r}(t) = (r \cos t^2, r \sin t^2)$.

5. feladat. (Z) Vezesse le az egységkör alábbi paraméterezéseiből az ívhossz szerinti paraméterezést.

a) $\boldsymbol{r} : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$.

b) $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{r} = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$.

6. feladat. (A) Legyen a térben mozgó pontszerű részecske tömege m, helyvektora $\boldsymbol{r}(t)$, gyorsulása $\boldsymbol{a}(t)$, helyzeti energiája $W(t)$. A Newton-tételből ($\boldsymbol{F}(t) = m\boldsymbol{a}(t)$, ahol $\boldsymbol{F}(t)$ a t pillanatban a részecskére ható erő) vezessük le a

$$\frac{dW}{dt} = \boldsymbol{F}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

formulát.

7. feladat. (A) A térben két részecske mozog úgy, hogy a távolságuk állandó. Mutassuk meg, hogy a sebességvektoraiknak az őket összekötő egyenesre vett vetülete megegyezik.

8. feladat. (B) Mutassa meg, hogy a vontatási görbe paraméterezése $\mathbf{r}(t) = (\cos(t) + \ln(\tan(t/2)), \sin(t))$.

Görbület, torzió

9. feladat. (Z) Számítsuk ki minden pontjában az $\boldsymbol{r}_1(t) = (t, t^2)$ parabola és az $\boldsymbol{r}_2(t) = (t, \sin t)$ szinusz-görbe görbületét.

10. feladat. (Z) Határozzuk meg az

a) $\boldsymbol{r}(t) = (t, \sin t, \sin 3t)$;

b) $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, t^3 - 9t)$

görbék azon pontjait, ahol a görbület nulla, ahol a torzió nulla és ahol a torzió előjelet vált.

11. feladat. (B) Legyen Γ az a görbe, amelyet a $2R$ sugarú gömbből az R sugarú henger metsz ki, ahol a gömb origója a henger palástján van. (Viviani-féle görbe.)

a) Határozzuk meg Γ egy paraméterezését.

b) Határozzuk meg Γ görbületét. Van-e olyan pont, ahol a görbület nulla?

c) Határozzuk meg Γ torzióját és adjuk meg azokat a pontokat, ahol a torzió nulla és előjelet vált.

d) Határozzuk meg ezekben a pontokban a kisérő triédert.

Deriválás, Leibniz-szabály

12. feladat. (A) Jelölje $\mathcal{C}^\infty$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett végtelen sokszor differenciálható függvények halmazát.

a) Mutassa meg, hogy az alábbi műveletekkel $\mathcal{C}^\infty$ egységelemes, kommutatív gyűrű és $\mathbb{R}$ feletti vektortér:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

b) Legyen $f \in \mathcal{C}^\infty$ olyan függvény, melyre $f(a) = f'(a) = 0$ valamely $a \in \mathbb{R}$ számra. Mutassa meg, hogy ekkor $f = gh$, ahol $g, h \in \mathcal{C}^\infty$ és $g(a) = h(a) = 0$.

13. feladat. (B) Jelölje $\mathcal{C}^\infty$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett végtelen sokszor differenciálható függvények halmazát. Rögzítsük az $a \in \mathbb{R}$ számot és legyen $\alpha : \mathcal{C}^\infty \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre

$$\alpha(fg) = \alpha(f)g(a) + f(a)\alpha(g).$$

a) Mutassa meg, hogy a c konstans függvényre $\alpha(c) = 0$.

b) Mutassa meg, hogy ha az $f \in \mathcal{C}^\infty$ függvényre $f(a) = f'(a) = 0$, akkor $\alpha(f) = 0$.

14. feladat. (B) Jelölje $\mathcal{C}^\infty$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett végtelen sokszor differenciálható függvények halmazát. Legyen $\delta : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ olyan lineáris leképezés, mely kielégíti a Leibniz-szabályt:

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g).$$

a) Tegyük fel, hogy $\delta(x) = 0$, ahol $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az identikus leképezés $\mathbb{R}$-en. Mutassa meg, hogy ekkor $\delta f = 0$ minden $f \in \mathcal{C}^\infty$ esetén.

b) Mutassa meg, hogy $\delta f = uf'$, azaz $(\delta f)(x) = u(x)f'(x)$ minden $f \in \mathcal{C}^\infty$ esetén, ahol $u(x) = \delta(x)$.

Felületek megadása

15. feladat. (T) Mutassuk meg, hogy az $F(x, y, z) = 0$ felület érintősíkjának normálvektora $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$.

16. feladat. (Z) Legyen $\mathcal{F}$ az a felület, amelyet az $y = f(x)$ függvény y-tengely körüli elforgatásával kapunk. Határozzuk meg

a) $\mathcal{F}$ egyenletét,

b) $\mathcal{F}$ normálvektorát egy tetszőleges pontjában,

c) $\mathcal{F}$ érintősíkját egy tetszőleges pontjában.

17. feladat. (A) Mutassuk meg, hogy egy forgásfelület minden pontjában a normálvektor benne van egy, a forgástengelyt tartalmazó síkban.

18. feladat. (T) Legyen $\boldsymbol{v}$ a $\mathcal{F}$ felület P-beli érintővektora. Mutassuk meg, hogy a $d_{\boldsymbol{v}}$ iránymenti derivált független a definíciójában szereplő $\boldsymbol{G}(t)$ felületi görbe választásától.

19. feladat. (B) Mutassuk meg, hogy a $z = xy$ felületet minden érintősíkja két egyenesben metszi.

20. feladat. (Z) Tekintsünk egy $\boldsymbol{r}(u, v)$ $(u_1 \leq uu_2,\ v_1 \leq v \leq v_2)$ függvény által adott felületdarabot, melynek első alapmennyiségei $g_{11} \equiv 1$, $g_{12} \equiv 0$, $g_{22} = (1 + u^2v^2)^2$. Határozzuk meg a felület felszínét.

Görbületek, alapmennyiségek

21. feladat. (T)

a) Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb normálvektorát egy tetszőleges pontjában.

b) Határozzuk meg a $z = xy$ nyeregfelület $P(0, 0, 0)$ pontbeli, (u, v) irányhoz tartozó $\kappa_{\boldsymbol{n}}$ normálgörbületét.

22. feladat. (Z)

a) Határozza meg a $z = x^2 - xy + y^2$ felület normálvektorát egy tetszőleges pontjában!

b) Határozza meg az a) pontban szereplő felület Gauss-féle görbületét (szorzatgörbületét) a $P(0, 0, 0)$ pontban! (A Gauss-féle görbület a két főnormálgörbület szorzata.)

23. feladat. (T) A Meusnier- és Euler-tételek segítségével határozzuk meg az ellipszis görbületét a csúcspontjaiban.

24. feladat. (T) Határozzuk meg a $z = x^2 + xy + y^2$ felület (u, v) irányhoz tartozó normálgörbületét és főgörbületeit az $\boldsymbol{O}(0, 0, 0)$ pontban.

25. feladat. (T) Számítsuk ki az egységgömb első és második alapmennyiségeit, és a Christoffel-szimbólumait. Mutassuk meg, hogy a főkörök geodetikus vonalak.

26. feladat. (Z) Számítsuk ki az egyköpenyű hiperboloid első és második alapmennyiségeit, Christoffel-szimbólumait és a Gauss-görbületét.

27. feladat. (Z) Számítsuk ki a kétköpenyű hiperboloid első és második alapmennyiségeit, Christoffel-szimbólumait és a Gauss-görbületét.

28. feladat. (T) Számítsuk ki a pszeudoszféra első és második alapmennyiségeit, Christoffel-szimbólumait és a Gauss-görbületét.

Deriválás felületeken, Lie-zárójel

29. feladat. (A) Jelölje M_n az $n \times n$-en mátrixok halmazát és értelmezzük M_n-en az $[A, B] = AB - BA$ műveletet. Mutassuk meg, hogy ez a művelet

a) bilineáris,

b) antiszimmetrikus: $[A, B] = -[B, A]$,

c) és teljesíti a Jacobi-azonosságot: $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

30. feladat. (Z) Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ érintő vektormezőkre $d_{\boldsymbol{X}} d_{\boldsymbol{Y}} - d_{\boldsymbol{Y}} d_{\boldsymbol{X}}$ deriválás.

31. feladat. (A) Tekintsük a $\mathcal{F}$-en értelmezett $\boldsymbol{X} = x_1 \partial_1 \boldsymbol{r} + x_2 \partial_2 \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{Y} = y_1 \partial_1 \boldsymbol{r} + y_2 \partial_2 \boldsymbol{r}$ érintő vektormezőket. Mutassuk meg, hogy $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = z_1 \partial_1 \boldsymbol{r} + z_2 \partial_2 \boldsymbol{r}$, ahol

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 (d_{\partial_1 \boldsymbol{r}} y_1) + x_2 (d_{\partial_2 \boldsymbol{r}} y_1) - (d_{\partial_1 \boldsymbol{r}} x_1) y_1 - (d_{\partial_2 \boldsymbol{r}} x_1) y_2, \\ z_2 &= x_1 (d_{\partial_1 \boldsymbol{r}} y_2) + x_2 (d_{\partial_2 \boldsymbol{r}} y_2) - (d_{\partial_1 \boldsymbol{r}} x_2) y_1 - (d_{\partial_2 \boldsymbol{r}} x_2) y_2. \end{aligned}$$

32. feladat. (B) Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ érintő vektormezőkre $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = d_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y} - d_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{X}$.