Bolyai-geometria feladatsor, nappali tagozat, 2008/2009. tavasz

Dr. Nagy Gábor, Geometria Tanszék

2009. március 26.

Az osztályzat megszerzése feladatmegoldással történik. Feladatokat egyénileg vagy párban lehet beadni, kizárólag emailben. Javításra egyszer van lehetőség. A vizsgához 6 feladatot kell benyújtani, 3-t az I. és 3-t a II. rész feladatai közül.

I. rész

1. feladat. Legyen k és m két kögyenes a Möbius-síkon. Mutassa meg, hogy a k-ra vett tükrözés (azaz tengelyes tükrözés vagy inverzió) akkor és csak akkor hagyja fixen m-et, ha k és m derékszögben metszik egymást.

2. feladat. Mutassa meg, hogy a Poicaré-féle félsíkmodellben a hiperbolikus egyenesek általános egyenlete $\alpha z\bar{z} + \beta(z+\bar{z}) + \gamma = 0$, ahol $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Határozza meg a $p, q \in \mathbb{H}$ pontokon átmenő hiperbolikus egyenes egyenletét.

3. feladat. Legyenek $p, q \in \mathbb{H}$ és jelölje $\ell = pq$ az őket összekötő hiperbolikus egyenest. Adjuk meg az ℓ végtelen távoli pontjait a p és q komplex számok függvényében.

4. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely kögyenestartó transzformáció előáll legfeljebb 4 kögyenesre vett tükrözés szorzataként.

5. feladat. Határozzuk meg azt a törtlineáris leképezést, amely a $0, 1, \infty$ elemeket az $u, v, w \in \overline{\mathbb{C}}$ elemekbe viszi.

6. feladat. Legyenek $z_1, z_2, z_3, z_1', z_2', z_3' \in \overline{\mathbb{C}}$ elemek oly módon, hogy $i \neq j$ esetén $z_i \neq z_j, z_i' \neq z_j'$. Mutassuk meg, hogy pontosan egy T Möbius-traszformáció létezik, melyre $T(z_1) = z_1'$, $T(z_2) = z_2'$ és $T(z_3) = z_3'$. (Szigorú 3-tranzitivitás.)

7. feladat. Mutassuk meg, hogy a $T(z) = \frac{1}{z}$ Möbius-transzformáció felcseréli a

$$K : \alpha z\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + \gamma = 0$$
$$K' : \gamma z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + \alpha = 0$$

kögyeneseket.

8. feladat. Tekintsük a $T = \{0, 1, \infty\}$ halmazt. Határozza meg azokat az m Möbius-transzformációkat, melyekre $m(T) = T$.

9. feladat. Mutassa meg, hogy a $z \mapsto \frac{1}{z}$ leképzetés megőrzi a kettősviszonyt.

10. feladat. Határozza meg azon s valós számot, melyre a $2 + 3i$, $-2i$, $1 - i$ és s pontok egy körre illeszkednek.

Definíció. Legyen G az X halmaz transzformációiból álló csoport. Azt mondjuk, hogy G *tranzitívan hat X-en,* ha bármely $x, y \in X$ elemekhez létezik $g \in G$ elem, melyre $g(x) = y$.

11. feladat. Mutassa meg, hogy Möb($\mathbb{H}$) tranzitívan hat a hiperbolikus egyenesek halmazán.

12. feladat. Adja meg Möb($\mathbb{H}$) egy konkrét elemét, mely az 1 és -2 ideális pontok által meghatározott ℓ hiperbolikus egyenest a képzetes tengely I pozitív részébe viszi.

13. feladat. Mutassa meg, hogy Möb($\mathbb{H}$) tranzitívan hat a hiperbolikus félsíkok halmazán.

14. feladat. Jelölje I a képzetes tengelyben foglalt hiperbolikus egyenest. Határozza meg Möb($\mathbb{H}$) azon elemeit, melyek I-t fixen hagyják.

15. feladat. Határozza meg az $x + iy$ hiperbolikus pont tükörképét a $z\bar{z} - 2\beta(z + \bar{z}) = 0$ egyenletű hiperbolikus egyenesre.

16. feladat. Határozza meg a $4 + i$ és $5 + 2i$ pontok hiperbolikus felezőmerőlegesét.

II. rész

17. feladat. Határozza meg a $P = -2+5i$ és $Q = 3i$ hiperbolikus pontok távolságát a félsíkmodellben.

18. feladat. Legyen $s > 0$ és definiáljuk a félsíkmodell X_s ponthalmazát mint a a $\{z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) = -1\}$, $\{z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) = 1\}$ és $\{z \in \mathbb{H} \mid \Im(z) = s\}$ euklideszi egyenesek által határolt tartományt. Számolja ki X_s hiperbolikus területét.

19. feladat. Írja fel képlettel az a oldalú hiperbolikus szabályos háromszög szögét. Számolja ki a háromszög területét $a = 5$ esetén.

20. feladat. Bizonyítsa be, hogy bármely $n \geq 5$ esetén létezik olyan korlátos szabályos hiperbolikus n-szög, melynek minden szöge derékszög.

21. feladat. Mutassa meg, hogy a $P = r(\cos(u) + i\sin(u))$ pontnak a képzetes tengelytől vett távolsága $\left|\ln\left(\dfrac{\sin(u)}{\cos(u)+1}\right)\right|$.

22. feladat. Mutasss meg, hogy a $P = p_1 + ip_2$ pontnak a képzetes tengelytől vett távolsága $\ln\left(\dfrac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}+p_1}\right)$.

23. feladat. Írja fel és bizonyítsa be a hiperbolikus Pitagorasz-tételt.

24. feladat. [Három tükrözés tétele.] Legyen a, b, c három egyenes a P ponton keresztül és jelölje a rájuk vett tengelyes tükrözést τ_a, τ_b, τ_c. Mutassa meg, hogy ekkor valamely P-n átmenő d egyenesre teljesül $\tau_a \circ \tau_b \circ \tau_c = \tau_d$.

25. feladat. Mutassa meg, hogy az

$$\alpha_t : z \mapsto \frac{\cos(t)z + \sin(t)}{-\sin(t)z + \cos(t)}$$

leképezések a félsíkmodell 1-paraméteres mozgáscsoportját alkotják. Mutassa meg, hogy minden t-re $\alpha_t(i) = i$.

26. feladat. Mutassa meg, hogy a $P = xi$ hiperbolikus pont pályája az előző feladatban definiált $\{\alpha_t\}$ mozgáscsoport mellett $O = \frac{(x^2+1)}{2x}i$ középpontú euklideszi kör. Határozzuk meg ezen kör euklideszi és hiperbolikus sugarát.

27. feladat. Mutassa meg, hogy $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ tranzitívan hat a paraciklusok halmazán. (A megoldásban adja meg $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ és a paraciklusok definícióját is.)