

# Bolyai-geometria feladatsor a levelező tagozat számára

Dr. Nagy Gábor, Geometria Tanszék

2006. november 24.

Az osztályzat megszerzése feladatmegoldással történik. Feladatokat egyénileg vagy párban lehet beadni, kizárólag emailben. Javításra egyszer van lehetőség. A vizsgához 4 feladatot kell benyújtani, 2-t az I. és 2-t a II. rész feladatai közül.

## I. rész

**1. feladat.** Mutassa meg, hogy a Poincaré-féle félsíkmodellben a hiperbolikus egyenesek általános egyenlete  $\alpha z\bar{z} + \beta(z + \bar{z}) + \gamma = 0$ , ahol  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Határozza meg a  $p, q \in \mathbb{H}$  pontokon átmenő hiperbolikus egyenes egyenletét.

**2. feladat.** Legyenek  $p, q \in \mathbb{H}$  és jelölje  $\ell = pq$  az őket összekötő hiperbolikus egyenest. Adjuk meg az  $\ell$  végtelen távoli pontjait a  $p$  és  $q$  komplex számok függvényében.

**3. feladat.** Mutassuk meg, hogy bármely kögyenestartó transzformáció előáll legfeljebb 4 kögyenesre vett tükrözés szorzataként.

**4. feladat.** Határozzuk meg azt a törtlineáris leképezést, amely a  $0, 1, \infty$  elemeket az  $u, v, w \in \overline{\mathbb{C}}$  elemekbe viszi.

**5. feladat.** Legyenek  $z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2, z'_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  elemek oly módon, hogy  $i \neq j$  esetén  $z_i \neq z_j, z'_i \neq z'_j$ . Mutassuk meg, hogy pontosan egy  $T$  Möbius-transzformáció létezik, melyre  $T(z_1) = z'_1, T(z_2) = z'_2$  és  $T(z_3) = z'_3$ . (Szigorú 3-tranzitivitás.)

**6. feladat.** Mutassuk meg, hogy a  $T(z) = \frac{1}{z}$  Möbius-transzformáció felcseréli a

$$K : \alpha z \bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + \gamma = 0$$

$$K' : \gamma z \bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + \alpha = 0$$

kögyeneseket.

**7. feladat.** Tekintsük a  $T = \{0, 1, \infty\}$  halmazt. Határozza meg azokat az  $m$  Möbius-transzformációkat, melyekre  $m(T) = T$ .

**8. feladat.** Mutassa meg, hogy a  $z \mapsto \frac{1}{z}$  leképezés megőrzi a kettősviszonyt.

**9. feladat.** Határozza meg azon  $s$  valós számot, melyre a  $2 + 3i$ ,  $-2i$ ,  $1 - i$  és  $s$  pontok egy körre illeszkednek.

**Definíció.** Legyen  $G$  az  $X$  halmaz transzformációiból álló csoport. Azt mondjuk, hogy  $G$  *tranzitívan hat*  $X$ -en, ha bármely  $x, y \in X$  elemekhez létezik  $g \in G$  elem, melyre  $g(x) = y$ .

**10. feladat.** Mutassa meg, hogy  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tranzitívan hat a hiperbolikus egyenesek halmazán.

**11. feladat.** Adja meg  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  egy konkrét elemét, mely az  $1$  és  $-2$  ideális pontok által meghatározott  $\ell$  hiperbolikus egyenest a képzetes tengely  $I$  pozitív részébe viszi.

**12. feladat.** Mutassa meg, hogy  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tranzitívan hat a hiperbolikus félsíkok halmazán.

**13. feladat.** Jelölje  $I$  a képzetes tengelyben foglalt hiperbolikus egyenest. Határozza meg  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  azon elemeit, melyek  $I$ -t fixen hagyják.

**14. feladat.** Határozza meg az  $x + iy$  hiperbolikus pont tükörképét a  $z\bar{z} - 2\beta(z + \bar{z}) = 0$  egyenletű hiperbolikus egyenesre.

**15. feladat.** Határozza meg a  $4 + i$  és  $5 + 2i$  pontok hiperbolikus felezőmerőlegesét.

## II. rész

**16. feladat.** Határozza meg a  $P = -2 + 5i$  és  $Q = 3i$  hiperbolikus pontok távolságát a félsíkmodellben.

**17. feladat.** Legyen  $s > 0$  és definiáljuk a félsíkmodell  $X_s$  ponthalmazát mint a  $\{z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) = -1\}$ ,  $\{z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) = 1\}$  és  $\{z \in \mathbb{H} \mid \Im(z) = s\}$  euklideszi egyenesek által határolt tartományt. Számolja ki  $X_s$  hiperbolikus területét.

**18. feladat.** Írja fel képlettel az  $a$  oldalú hiperbolikus szabályos háromszög szögét. Számolja ki a háromszög területét  $a = 5$  esetén.

**19. feladat.** Bizonyítsa be, hogy bármely  $n \geq 5$  esetén létezik olyan korlátos szabályos hiperbolikus  $n$ -szög, melynek minden szöge derékszög.

**20. feladat.** Mutassa meg, hogy a  $P = r(\cos(u) + i \sin(u))$  pontnak a képzetes tengelytől vett távolsága  $\left| \ln \left( \frac{\sin(u)}{\cos(u) + 1} \right) \right|$ .

**21. feladat.** Mutass meg, hogy a  $P = p_1 + ip_2$  pontnak a képzetes tengelytől vett távolsága  $\ln \left( \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2} + p_1} \right)$ .

**22. feladat.** Írja fel és bizonyítsa be a hiperbolikus Pitagorasz-tételt.

**23. feladat.** [Három tükrözés tétele.] Legyen  $a, b, c$  három egyenes a  $P$  ponton keresztül és jelölje a rájuk vett tengelyes tükrözést  $\tau_a, \tau_b, \tau_c$ . Mutassa meg, hogy ekkor valamely  $P$ -n átmenő  $d$  egyenesre teljesül  $\tau_a \circ \tau_b \circ \tau_c = \tau_d$ .

**24. feladat.** Mutassa meg, hogy az

$$\alpha_t : z \mapsto \frac{\cos(t)z + \sin(t)}{-\sin(t)z + \cos(t)}$$

leképezések a félsíkmodell 1-paraméteres mozgáscsoportját alkotják. Mutassa meg, hogy minden  $t$ -re  $\alpha_t(i) = i$ .

**25. feladat.** Mutassa meg, hogy a  $P = xi$  hiperbolikus pont pályája az előző feladatban definiált  $\{\alpha_t\}$  mozgáscsoport mellett  $O = \frac{(x^2+1)}{2x}i$  középpontú euklideszi kör. Határozzuk meg ezen kör euklideszi és hiperbolikus sugarát.

**26. feladat.** Mutassa meg, hogy  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$  tranzitívan hat a paraciklusok halmazán. (A megoldásban adja meg  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$  és a paraciklusok definícióját is.)