Feladatsor az Algebrai síkgörbék c. tantárgyhoz
2010/2011. II. félév

A vizsgjegyhez tetszőlegesen kiválasztott három számolós és egy bizonyítós feladat megoldásának benyújtása szükséges. (Az (a), (b), stb. alpontokba szedett feladatok is egy egésznek számítanak.)

Ügyeljünk a megoldások részletes, formailag és tartalmilag helyes leírására. A benyújtás előtt lehetséges konzultációt kérni.

Számológép és számítógépes programok (Maple, stb) használata megengedett, de a programokat is csatolni kell.

Határidő: 2011. május 31.

Számolós feladatok

1. Mutassa meg, hogy létezik olyan $\Gamma : f(X,Y) = 0$ köbös görbe, melynek *egy kivétellel* minden pontja előáll az $(x(t), y(t)) = (1+t^2, t+t^3)$ paraméterezésben.

2. Mutassa meg, hogy $x = i-1$ gyöke az $f(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 2$ polinomnak. Keressen még egy komplex gyököt, majd faktorizálja teljesen a $f(X)$-et.

3. Adjon meg egy olyan affin transzformációt, amely az $f(X,Y) = X^3 + Y^3 + 3XY$ polinomot a $g(X,Y) = X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$ polinomba viszi.

4. Adjuk meg az $X^3 - 6X^2Y + 11XY^2 - 6Y^3 + 1 = 0$ görbe végtelen távoli pontjait.

5. Adjuk meg a $25X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$ görbének a $P_1(1,7,1)$ és $P_2(1,-1,7)$ pontokat összekötő egyenessel vett metszéspontjait.

6. Adjuk meg az alábbi görbék szinguláris pontjait.

(a) $XZ^2 - Y^3 + XY^2 = 0.$

(b) $(X+Y+Z)^3 - 27XYZ = 0.$

(c) $X^2Y^2 + 36XZ^3 + 24YZ^3 + 108Z^4 = 0.$

7. Vizsgáljuk meg az

$$X^2Y^5 - X^5Y^2 - 2XY^5Z + X^5Z^2 + Y^5Z^2 - X^3YZ^3 \\ + 2\alpha X^2Y^2Z^3 - XY^3Z^3 = 0$$

($\alpha \in \mathbb{C}$) görbe szingularitásait az $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ és $(0,0,1)$ pontokban.

8. Adjuk meg az alábbi görbepárok metszéspontjait.

(a) $X(Y^2 - XZ) - Y^3 = 0$ és $Y^4 + Y^3Z - X^2Y^2 = 0$.

(b) $X^3 - Y^3 - 2XYZ = 0$ és $2X^3 - 4X^2Y - 3XY^2 - Y^3 - 2X^2Z = 0$.

(c) $X^4 + Y^4 + Y^2Z^2 = 0$ és $X^4 + Y^4 - 2Y^3Z - 2X^2YZ - XY^2Z + Y^2Z^2 = 0$.

9. A rezultáns segítségével keressük meg a alábbi paraméterezésben megadott görbék $f(X,Y)$ polinomját:

(a) $x(t) = t^4$, $y(t) = t + t^2$.

(b) $x(t) = t^2 + t^3$, $y(t) = t^4$.

(c) $x(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$.

[*Útmutatás:* Tekintsük az $f(X,Y,t) = X - x(t)$, $g(X,Y,t) = Y - y(t)$ polinomokat és a rezultáns segítségével küszöböljük ki a t ismeretlent.]

Bizonyítós feladatok

10. Legyen B_1, B_2 és B_3 az

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0$$

irreducibilis kúpszelet három különböző pontja. Egy lineáris transzormációval a B_1, B_2, B_3 pontok elvihetők az E_1, E_2, E_3 pontokba. Ekkor a kúpszelet képének az egyenlete $c_3X_1X_2 + c_2X_1X_3 + c_1X_2X_3 = 0$ lesz, ahol $c_1c_2c_3 \neq 0$. Ezt az $x_i' = x_i/c_i$ (azaz $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$) lineáris transzformáció az $X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = 0$ egyenletű kúpszeletbe viszi. Tehát bármely irreducibilis kúpszelet átvihető bármely másikba egy lineáris transzfomációval, és ez a transzformáció egyértelműen meghatározott.

11. Legyen $f(Y) = a_0Y^m + a_1Y^{m-1} + \cdots$ és $g(Y) = Y - b$. Mutassuk meg, hogy ekkor $R_{f,g} = \pm f(b)$.

12. Mutassuk meg, hogy az

$$f(X,Y,Z) = XY^2 + YZ^2 + ZX^2 + X^2Y + Y^2Z + Z^2X + kXYZ = 0$$

görbének csak a $k = 2, 3$ vagy -6 esetekben van szinguláris pontja. [*Útmutatás:* Vizsgáljuk az $f - X\frac{\partial f}{\partial X}, f - Y\frac{\partial f}{\partial Y}, f - X\frac{\partial f}{\partial X}$ polinomokat.]

13. Mutassa meg, hogy a $\Gamma : F(X,Y,Z) = XYZ + (Y+Z)^3$ görbének pontosan három inflexiós pontja van, és ezek mindegyike illeszkedik az $X + 3Y + 3Z = 0$ egyenesre. [*Útmutatás:* (1) Mutassa meg, hogy $(1,0,0)$ a Γ egyetlen szinguláris pontja, amibe 2 érintő húzható. (2) Ennek segítségével mutassa meg, hogy Γ paraméterezhető $r(t) = (-(t+1)^3, t^2, t)$ alakban. (3) Az általános pontban felírva az érintő egyenletét, mutassa meg, hogy az inflexiós pontok pontosan olyan paramétereknek felelnek meg, melyre $t^3 + 1 = 0$. (4) Mutassa meg, hogy ezekhez a paraméterekhez tartozó görbepontok rajta vannak az egyenesen.]