Harmadrendű görbék a komplex projektív síkon

habilitációs tantárgyi előadás

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2013. március 12.

Tartalomjegyzék I

1. Ismétlés
   - Algebrai görbék
   - Affin transzformációk
   - Másodrendű görbék
2. Harmadrendű görbék
   - Harmadrendű görbék egyenlete
   - Harmadrendű görbék simasága
3. Példák magasabb fokú algebrai görbékre
   - Parametrization
   - Examples

Tartalomjegyzék

1. Ismétlés
2. Harmadrendű görbék
3. Példák magasabb fokú algebrai görbékre

Algebrai görbe a koordináta síkon

- A komplex koordináta sík pontjai az (x, y) számpárok, ahol $x, y \in \mathbb{C}$.
- Legyen $f(X, Y)$ kétváltozós n-edfokú polinom, melynek együtthatói komplex számok:

$$f(X,Y) = \sum_{i,j\geq 0}^{i+j\leq n} a_{ij} X^i Y^j \qquad (a_{ij} \in \mathbb{C}).$$

- Az $f(X, Y)$ zérushelyeinek

$$V_f = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

halmazát az $f(X, Y)$ polinom által meghatározott algebrai görbének nevezzük.
- A görbe foka alatt a megfelelő polinom (totális) fokát értjük.

A másodfokú (=másodrendű) görbék

- A kétismeretlenes másodfokú polinom általános alakja:

$$f(X,Y) = \underbrace{a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2}_{\text{kvadratikus (négyzetes) rész}} + \underbrace{a_{10}X + a_{01}Y}_{\text{lineáris rész}} + \underbrace{a_{00}}_{\text{konstans tag}}.$$

- Ahhoz, hogy valóban másodfokú legyen, feltételezzük, hogy a_{20}, a_{11}, a_{02} valamelyike nem nulla.

Példák:

- Ellipszis: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$. (Speciális eset a kör: $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.)
- Hiperbola: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$.
- Parabola: $X^2 - 2pY = 0$.

Példák elfajuló másodrendű görbékre:

- a) $X^2 = 0$. b) $XY = 0$. c) $X^2 - Y^2 = 0$. d) $X^2 + Y^2 = 0$.

Koordináta transzformációk

- A koordináta sík $P(x, y) \mapsto P'(x', y')$ alakú transzformációit, ahol

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$$

  és $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, affin transzformációknak nevezzük.
- Az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrixot az affin transzformáció mátrixának nevezzük.
- A (b_1, b_2) vektort az affin transzformáció eltolásvektorának nevezzük.

Tétel

Az affin transzformációk csoportot alkotnak, azaz affin transzformáció inverze, és affin transzformációk szorzata is affin transzformáció. Az identikus leképezés mátrixa az egységmátrix, eltolásvektora pedig a nullvektor.

A másodrendű görbék osztályozása

Tétel

Tetszőleges másodrendű görbe egyenlete egy forgatás és egy eltolás alkalmazásával $X^2 + \alpha Y^2 + \beta = 0$ alakra vagy $X^2 + \gamma Y = 0$ alakra hozható.

Tétel

Tetszőleges másodrendű görbe az alábbi alakzatok egyikébe vihető:

1. (Nemelfajuló másodrendű görbék) $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.
   - Ellipszis, parabola, hiperbola.
   - Képzetes hiperbola: $X^2 + Y^2 + 1 = 0$.
2. (Elfajuló másodrendű görbék) $\alpha\beta\gamma = 0$.
   - Egyetlen egyenes „kétszer számolva”: $X^2 = 0$.
   - Két metsző egyenes uniója: $X^2 - Y^2 = 0$.
   - Két párhuzamos egyenes uniója: $X^2 - 1 = 0$.
   - Két metsző képzetes egyenes uniója: $X^2 + Y^2 = 0$.
   - Két párhuzamos képzetes egyenes uniója: $X^2 + 1 = 0$.

Tartalomjegyzék

1. Ismétlés
2. Harmadrendű görbék
3. Példák magasabb fokú algebrai görbékre

Reducibilis harmadfokú görbék

Definíció

A $\Gamma : f(X, Y) = 0$ algebrai görbét reducibilisnek nevezzük, ha f felbomlik alacsonyabb fokú polinomok szorzatára. Ellenkező esetben irreducibilis görbéről beszélünk.

- Ha $f = gh$, akkor $V_f = V_g \cup V_h$.
- Az $f(X, Y)$ harmadfokú polinom
  - vagy irreducibilis,
  - vagy egy elsőfokú és egy irreducibilis másodfokú,
  - vagy pedig három elsőfokú polinom szorzata.
- Ennek megfelelően, a Γ harmadfokú algebrai görbe
  - vagy irreducibilis,
  - vagy egy egyenes és egy kúpszelet uniója,
  - vagy pedig három (nem feltétlen különböző) egyenes uniója.

Irreducibilis harmadfokú görbék

A harmadfokú görbe általános egyenlete:

$$\underbrace{a_{30}X^3 + a_{21}X^2Y + a_{12}XY^2 + a_{03}Y^3} + a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + a_{10}X + a_{01}Y + a_{00} = 0$$

A továbbiakban olyan irreducibilis harmadrendű görbékkel foglalkozunk, melyek egyenlete

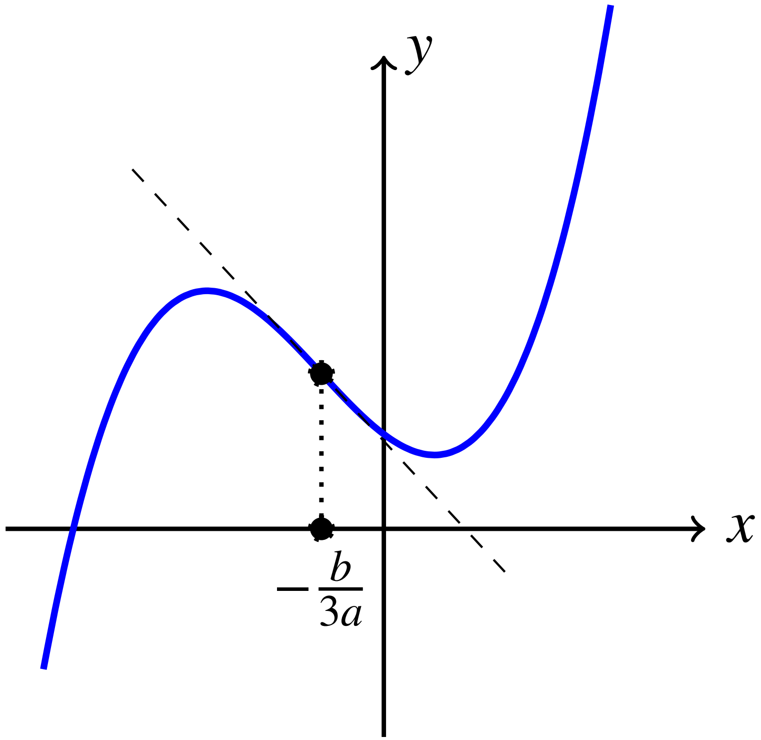
$$Y = u(X) \qquad \text{vagy} \qquad Y^2 = u(X)$$

alakban írható, ahol $u(X)$ komplex együtthatós harmadfokú polinom.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy ezzel *lényegében* minden esetet kimerítünk.

Harmadfokú polinom grafikonja

$$Y = f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$



$$f'(X) = 3aX^2 + 2bX + c$$
$$f''(X) = 6aX + 2b$$
$$f'''(X) = 6a \neq 0.$$

- Inflexiós pont: $x = -\frac{b}{3a}, y = f(-\frac{b}{3a})$.
- Eltolással $Y = aX^3 + cX$ alakra hozható.
- Csakugyan, a grafikon akkor és csak akkor megy át O-n, ha $d = 0$.
- Továbbá, akkor és csak akkor inflexiós pont O, ha $b = 0$.

Harmadfokú polinom grafikonja (folyt.)

Tétel

A harmadrendű polinom grafikonja affin transzformációval $Y = X^3$ alakra hozható.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy a grafikon egyenlete $Y = aX^3 + cX$ alakú, $a \neq 0$. Alkalmazzuk az

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = -\frac{c}{a}X + \frac{1}{a}Y \end{cases} \qquad \begin{cases} X = X' \\ Y = cX' + aY' \end{cases}$$

affin transzformációt:

$$cX' + aY' = Y = aX^3 + cX = a(X')^3 + cX' \Longrightarrow Y' = (X')^3. \quad \square$$

$Y^2 = u(X)$ alakú harmadrendű görbék I.

A továbbiakban olyan Γ harmadrendű görbéket vizsgálunk, melyek egyenlete

$$Y^2 = u(X)$$

alakú, ahol

$$u(X) = \gamma(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$$

komplex együtthatós harmadfokú polinom.

1. eset: Tegyük fel, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ és tekintsük az

$$\begin{cases} X' = X - \alpha, \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} Y, \end{cases} \qquad \begin{cases} X = X' + \alpha, \\ Y = \sqrt{\gamma} Y' \end{cases}$$

affin transzformációt. Ezt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\gamma(Y')^2 = Y^2 = \gamma(X-\alpha)^3 = \gamma(X')^3.$$

γ-val egyszerűsítve

$$Y^2 = X^3$$

adódik Γ egyenletére.

$Y^2 = u(X)$ alakú harmadrendű görbék II.

2. eset: Legyen most

$$Y^2 = \gamma(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$$

ahol $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Alkalmazzuk az

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}X - \frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}, \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\alpha_2-\alpha_1)^3}}Y, \end{cases} \qquad \begin{cases} X = (\alpha_2-\alpha_1)X' + \alpha_1, \\ Y = \sqrt{\gamma(\alpha_2-\alpha_1)^3}\,Y' \end{cases}$$

affin transzformációt. Ekkor $Y^2 = \gamma(\alpha_2-\alpha_1)^3(Y')^2$ és

$$\begin{aligned} u(X) &= \gamma\,(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3) \\ &= \gamma\,[\underbrace{(\alpha_2-\alpha_1)X'}_{X-\alpha_1}][\underbrace{(\alpha_2-\alpha_1)X'+\alpha_1-\alpha_2}_{X-\alpha_2}][\underbrace{(\alpha_2-\alpha_1)X'+\alpha_1-\alpha_3}_{X-\alpha_3}] \\ &= \gamma\,(\alpha_2-\alpha_1)^3\,X'(X'-1)(X'-c), \end{aligned}$$

amiből $\gamma(\alpha_2-\alpha_1)^3$-al leosztva adódik

$$(Y')^2 = X'(X'-1)(X'-c).$$

$Y^2 = u(X)$ alakú harmadrendű görbék III.

Ezzel beláttuk:

Tétel

Legyen $u(X)$ komplex együtthatós harmadfokú polinom. Ekkor az $Y^2 = u(X)$ görbe affin transzformációval

$$Y^2 = X^3$$

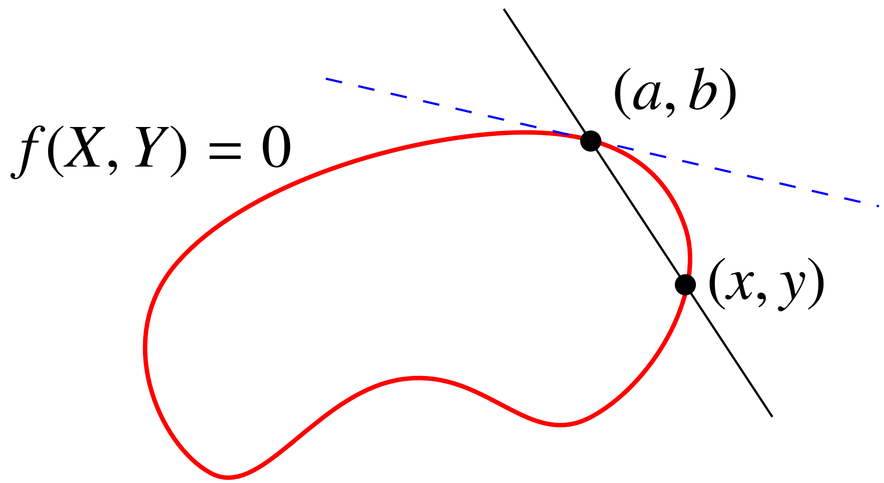
vagy

$$Y^2 = X(X-1)(X-c) \qquad (c \in \mathbb{C})$$

alakra hozható.

Harmadrendű görbék GeoGebrával

Egyenlettel adott görbéhez húzott érintő



Mottó

Az érintő a szelő határhelyzete.

Definíció

Legyen $P(a,b)$ az $f(X,Y)=0$ görbe pontja és tegyük fel, hogy $(f'_X(a,b), f'_Y(a,b)) \neq (0,0)$. A görbe $P(a,b)$-beli érintőjének egyenlete:

$$f'_X(a,b)(X-a)+f'_Y(a,b)(Y-b)=0.$$

Megjegyzés. A fenti egyenlet nyilván egy P-n átmenő egyenes.

Sima pont, szinguláris pont

Definíció

Az $f(X,Y)=0$ görbe $P(a,b)$ pontját sima pontnak nevezzük, ha (a,b)-ben nem tűnnek el a parciális deriváltak egyszerre, azaz ha

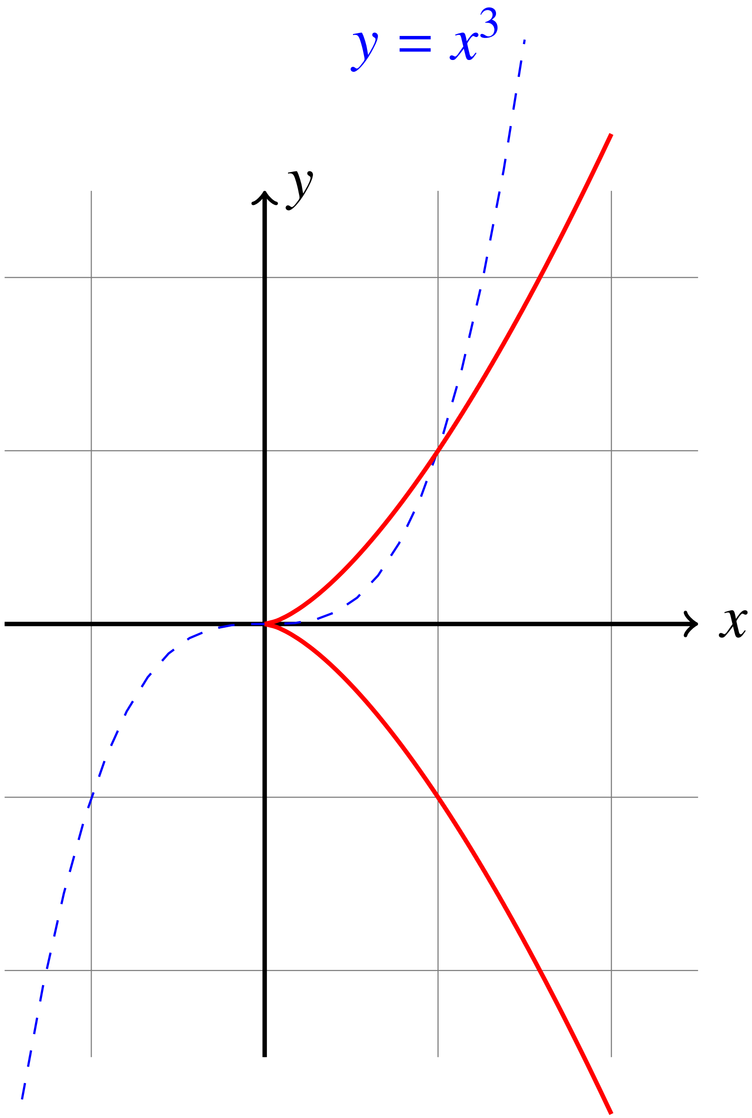
$$(f'_X(a,b), f'_Y(a,b)) \neq (0,0).$$

Ellenkező esetben $P(a,b)$-t a görbe szinguláris pontjának nevezzük.

Megjegyzés.

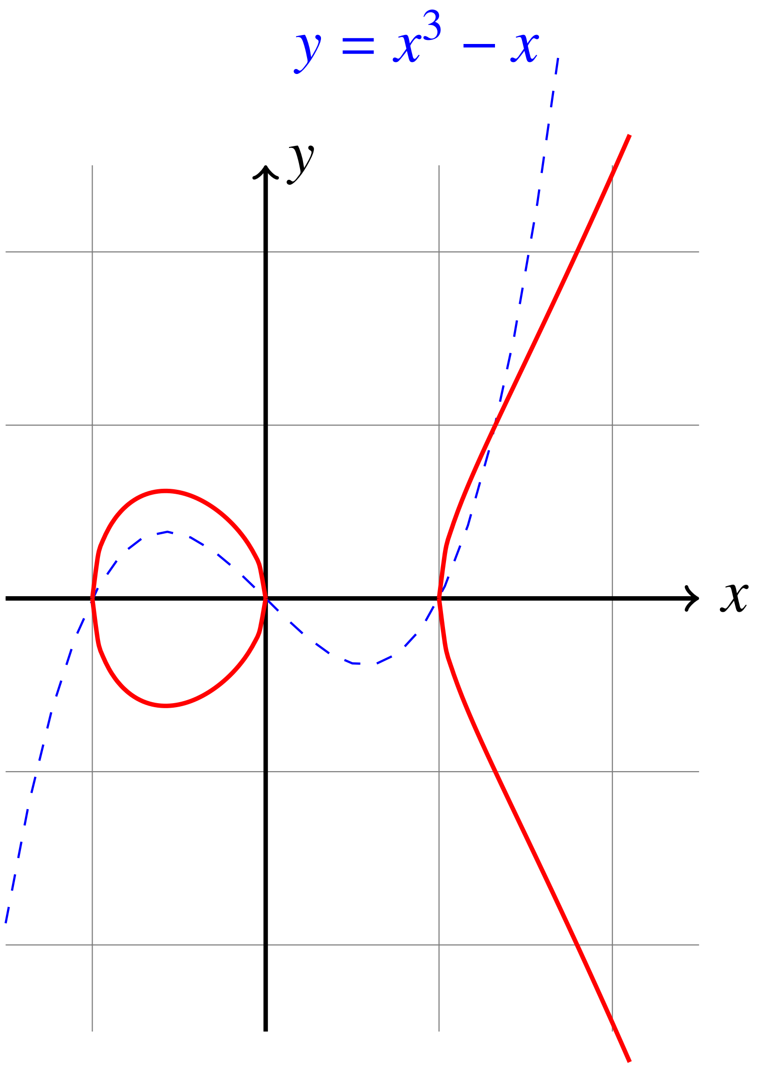
- A görbe sima pontjai pontosan azok, ahova egyértelmű érintőt tudunk húzni.
- Algebrai görbéknél az érintőt nem a határérték, hanem a polinom többszörös gyökének fogalmával építjük fel.

Csúcsszerű (cuspidális) szingularitással: $Y^2 = X^3$



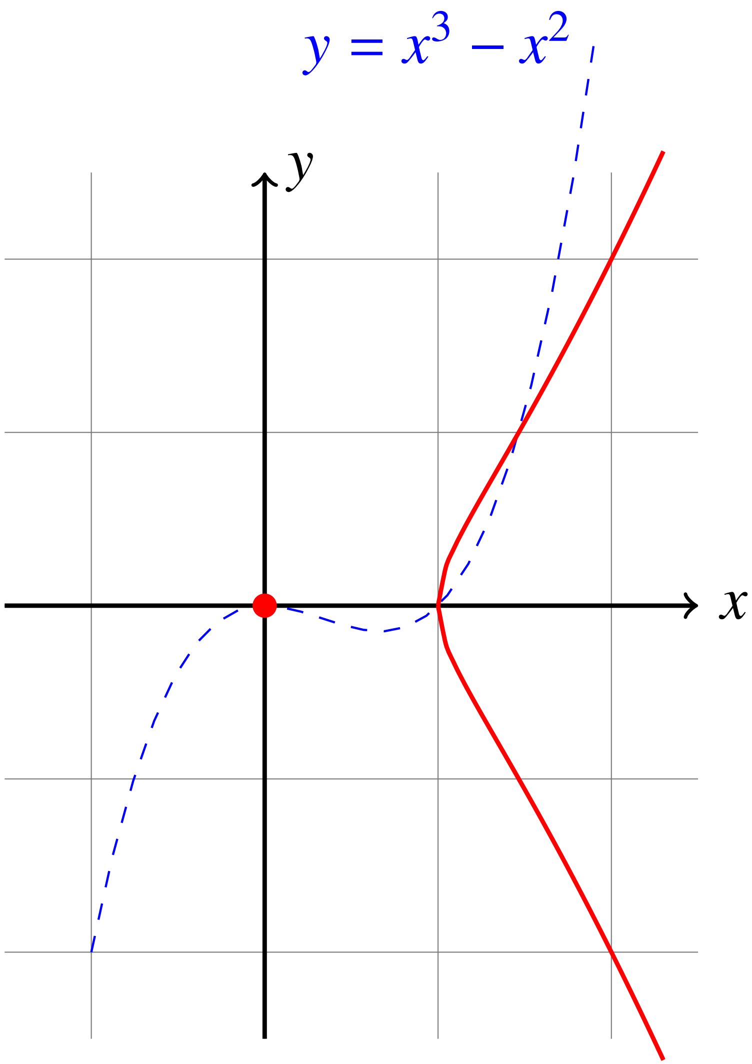
- Ezen görbe 90°-os elforgatottjával már találkozhattunk, ez az $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ függvény grafikonja.
- Az origótól különböző pontokban a görbe sima.
- Az origóban a két „ágnak” közös „érintője” van.

Szinguláris pont nélkül: $Y^2 = X^3 - X$



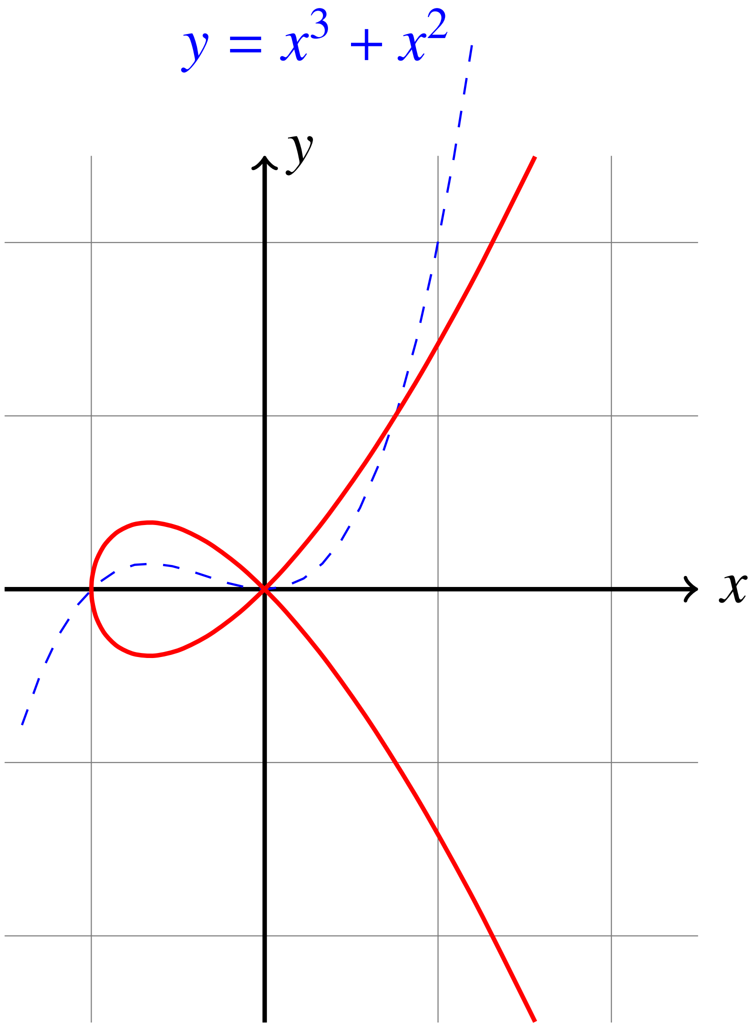
- Ennél a görbénél az $f(x) = \pm\sqrt{x^3 - x}$ „függvény” grafikonját kell vizsgálnunk.
- Az ábrán feltüntettük az $y = x^3 - x$ grafikont is.
- Érdekes módon a görbe a $(-1, 0)$, $(0, 0)$ és $(1, 0)$ pontokban „kisimul”, azaz tudunk hozzá érintőt húzni.
- A görbe két összefüggőségi komponensből áll.

Izolált ponttal: $Y^2 = X^3 - X^2$



- Az előzőhöz hasonlóan, az $y = x^3 - x^2$ segédgrafikon felhasználásával tudjuk megadni a görbénk alakját.
- A görbe két összefüggőségi komponensből áll, melyek közül az egyik egyetlen pont.
- Az ilyen pontokat a görbe izolált pontjainak nevezzük.
- Izolált pontba természetesen nem tudunk érintőt húzni.

Közönséges szingularitással: $Y^2 = X^3 + X^2$



- A görbét a szokásos módon, az $y = x^3 + x^2$ grafikon felhasználásával rajzoljuk meg.
- Azt látjuk, hogy a görbe az origóban átmetszi magát.
- Az origótól különböző pontokban a görbe sima.
- Az origóban a görbe két „sima ága” metszi egymást.
- Itt többféle értelemben beszélhetünk érintő egyenesről, ehhez azonban előbb az érintő fogalmát kell majd tisztáznunk.

Tartalomjegyzék

1 Ismétlés

2 Harmadrendű görbék

3 Példák magasabb fokú algebrai görbékre

Parametrization of (algebraic) curves

Definition

The rational functions $u(t), v(t)$ are said to parametrize the curve $f(X, Y) = 0$ if

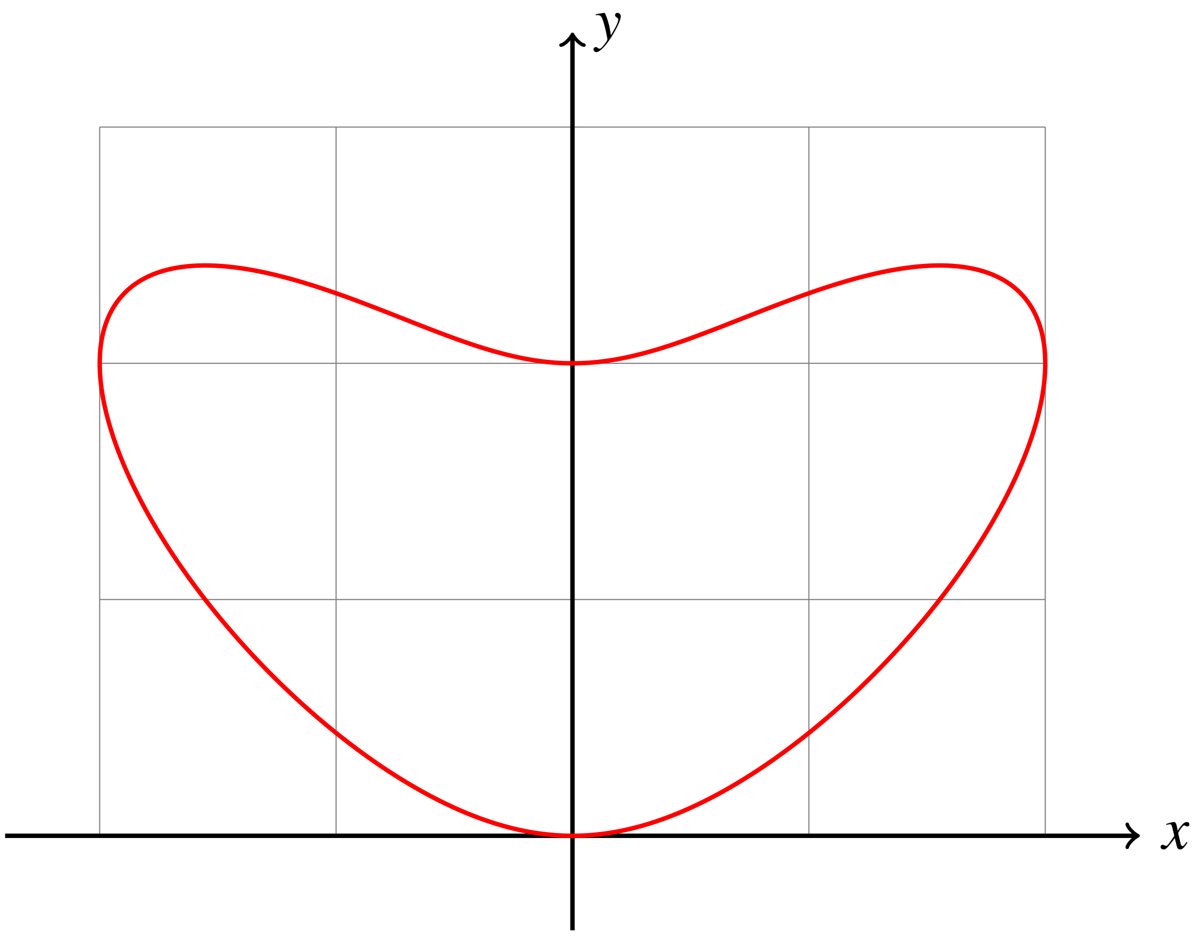
$$f(u(t), v(t)) = 0$$

holds formally.

- Notice that a parametrization sets up a correspondence between $\mathbb{C}$ and the set of points of the curve. (Be careful with the domains!)
- Any line can be parametrized with linear functions $x = u_1 t + u_2$, $y = v_1 t + v_2$.
- The graph of the polynomial $f(X)$ has the parametrization $x = t, y = f(t)$.
- CAUTION! A curve can have infinitely many parametrizations!
- Not all algebraic curves have rational parametrization. (Most of them doesn't...)
- In case of emergency: We allow $u(t), v(t)$ to be (formal) power series.

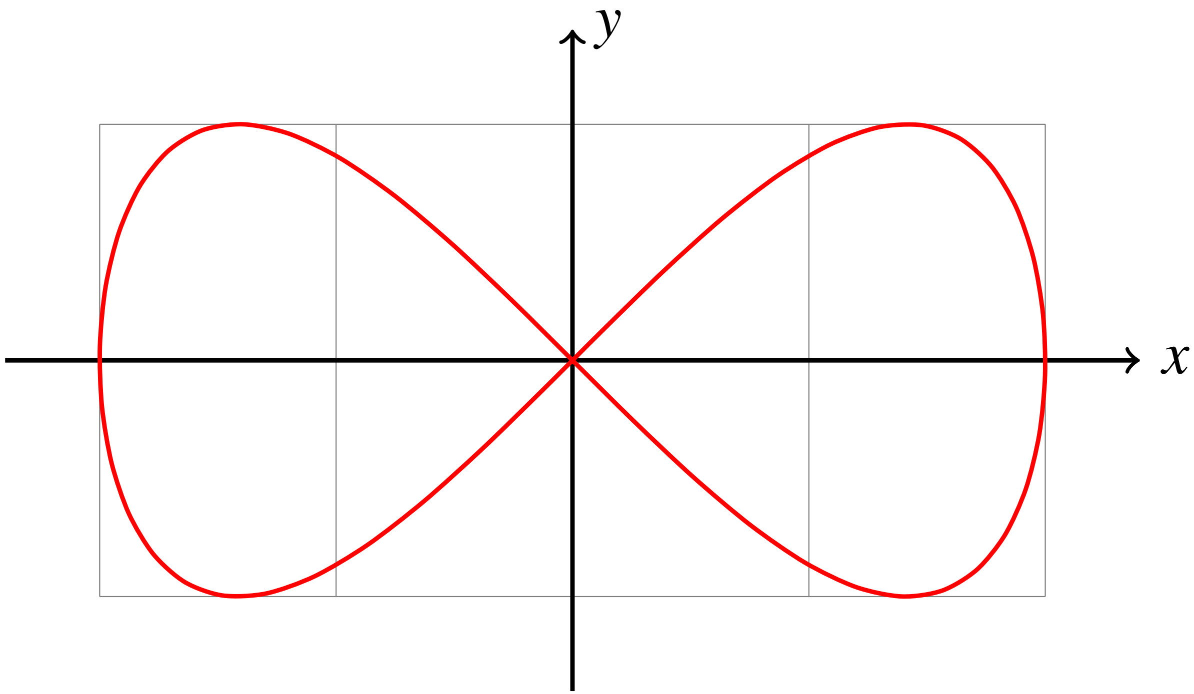
The Boomerang Curve $Y(X^2 + Y^2) - X^4 - Y^4 = 0$

- Parametrization: $$x = \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \qquad y = \frac{1+t^2}{1+t^4}.$$



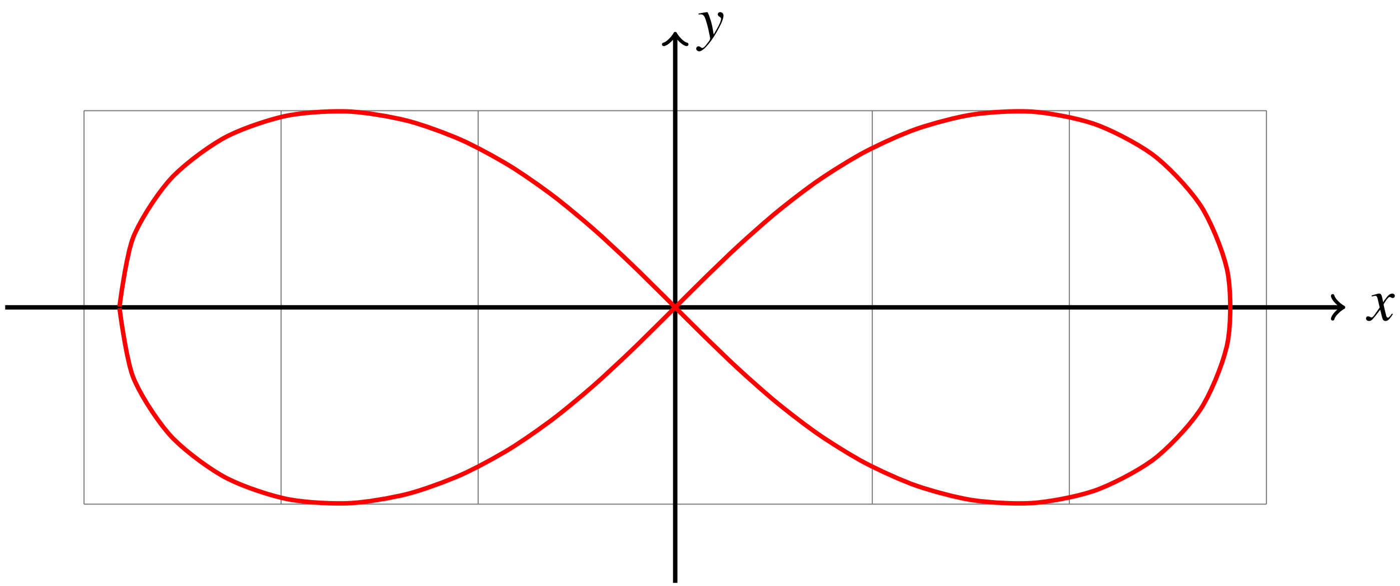
The Eight Curve $Y^2 - X^2 + X^4 = 0$

- Parametrization: $x = \sin t, \qquad y = \cos t \sin t.$



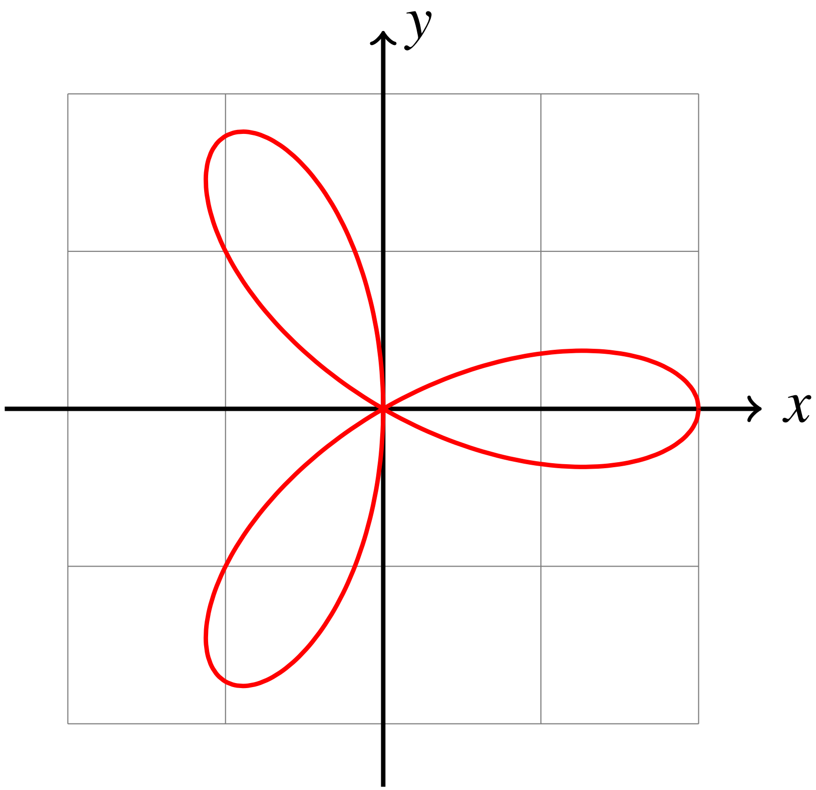
Lemniscate of Bernoulli $(X^2 + Y^2)^2 - 2(X^2 - Y^2) = 0$

- Parametrization: $$x = \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t + 1}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}\cos t \sin t}{\sin^2 t + 1}.$$



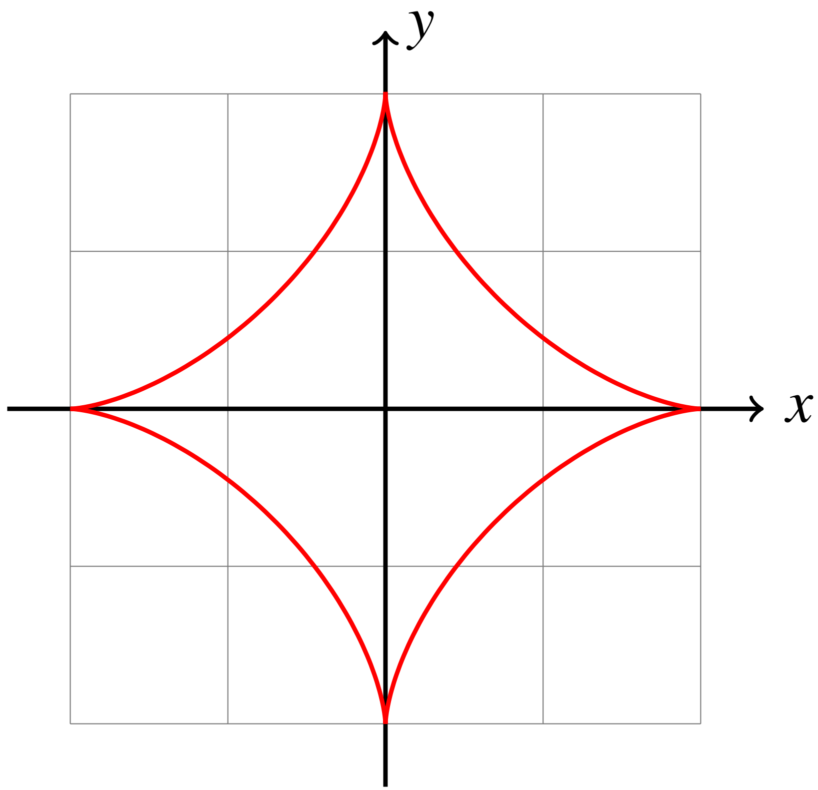
The Three-Leaved Clover Curve $(X^2+Y^2)^2 - X^3 + 3XY^2 = 0$

- Parametrization: $x = \cos(3t)\cos t, \qquad y = \cos(3t)\sin t.$



Astroid $(1 - X^2 - Y^2)^3 - 27X^2Y^2 = 0$

- Parametrization: $x = \sin^3 t, \qquad y = \cos^3 t.$



The Trott Curve

- Equation: $144(X^4 + Y^4) - 225(X^2 + Y^2) + 350X^2Y^2 + 81 = 0.$
- In order to find its parametrization, let us first find a parametrization of the hyperbola $144(X^2 + Y^2) - 225(X + Y) + 350XY + 81 = 0.$
- Count the double tangents!